ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ნათია გაჩეჩილაძე

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის მიმართულება

ფორმალური ჯგუფები, მახასიათებელი კლასები და ჩერნის მიახლოებები

ს ა დ ო ქ ტ ო რ ო   დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

ხელმძღვანელები:

სადოქტორო პროგრამის ხელმძღვანელი:
თსუ სრული პროფესორი
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი თეიმურაზ ვეფხვაძე

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:
თსუ ასოცირებული პროფესორი
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი მალხაზ ბაკურაძე

თბილისი
2018

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

Natia Gachechiladze

Faculty of Exact and Natural Sciences
Department of Mathematics

Formal Group Laws, Characteristic Classes and Chern Approximations

PhD Thesis

Supervisors:

Supervisor of the Doctoral Program:
Professor, TSU
Doctor of Science in Physics and Mathematics Teimuraz Vepkhvadze

Scientific Supervisor:
Associate Professor, TSU
Doctor of Science in Physics and Mathematics Malkhaz Bakuradze

Tbilisi
2018

აბსტრაქტი

შუსტერმა [23] შრომაში დაამტკიცა, რომ $K(s)^*(BG)$ მორავას K-თეორია mod 2 სრულად წარმოიდგინება 32 რიგის ყველა G ჯგუფისთვის. არსებობს 51 არაიზომორფული 32 რიგის ჯგუფი. ჰალ-სენიორის [44] შრომაში ყველა ეს ჯგუფი გადანომრილია $1, \cdots, 51$ ინდექსებით. ბაკურაძე-ჯიბლაძის [33] შრომაში $G_{38}, \cdots, G_{41}$ ჯგუფებისთვის ცხადი სახით მოყვანილია მორავას K-თეორიის რგოლების სტრუქტურა. კერძოდ, $K(s)^*(BG)$ რგოლი გაფაქტორებულია $K(s)^*(pt)$ ველზე 6 ცვლადის პოლინომიალური რგოლის იდეალით. სადისერტაციო ნაშრომში წარმოდგენილია გამოთვლები, სადაც გამოყენებულია ბაკურაძის [37] შრომაში მოყვანილი თეორემის შედეგი კარგი ჯგუფების შესახებ ჰოპკინს-კუნ-რავენელის აზრით. კერძოდ, განხილულია G_{36}, G_{37} ჯგუფები, რომლებიც იზომორფულია $(C_4 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_2$ ნახევრადპირდაპირი ნამრავლისა, ასევე ჯგუფი $G_{34} \cong (C_4 \times C_4) \rtimes C_2$ და მისი გაუხლეჩადი ვერსია G_{35}. ამ ჯგუფებისათვის $G/H \cong C_2$-ის მოქმედება არის დიაგონალური, ანუ უფრო მარტივი ვიდრე $G_{38}, \cdots, G_{41}$ ჯგუფებისთვის [33], მაგრამ, როგორც ვნახავთ მათთვის მორავას K-თეორიის რგოლური სტრუქტურა იმავე სირთულისაა. სადისერტაციო ნაშრომის ბოლო პარაგრაფში გამოკვლეულია თუ რამდენად ძლიერია ჰილბერტ-პუანკარეს პოლინომები მორავას K-თეორიის რგოლების განსასხვავებლად. კერძოდ, 32 რიგის ჯგუფების მაგალითებისთვის გამოთვლილია და შედარებულია შესაბამისი ჰილბერტ-პუანკარეს პოლინომები.

Abstract

In [23] Schuster proved that mod 2 Morava K-theory $K(s)^*(BG)$ is evenly generated for all groups G of order 32. There exist 51 non-isomorphic groups of order 32. In [44], these groups are numbered by $1, \cdots, 51$. For each of the groups $G_{38}, \cdots, G_{41}$, that fit in the title, the explicit ring structure is determined in [33]. In particular, $K(s)^*(BG)$ is the quotient of a polynomial ring in 6 variables over $K(s)^*(pt)$ by an ideal generated by explicit polynomials. In this thesis we present some calculations using the same arguments in combination with a theorem of [37] on good groups in the sense of Hopkins-Kuhn-Ravenel. In particular, we consider the groups G_{36}, G_{37}, each isomorphic to a semidirect product $(C_4 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_2$, the group $G_{34} \cong (C_4 \times C_4) \rtimes C_2$ and its non-split version G_{35}. For these groups the action of C_2 is diagonal, i.e., simpler than for the groups $G_{38}, \cdots, G_{41}$, however the rings $K(s)^*(BG)$ have the same complexity. At the last chapter of the thesis we analyze Morava K-theory rings of classifying spaces of some groups of order 32 via Hilbert-Poincaré polynomials.

სარჩევი

შესავალი

სადისერტაციო ნაშრომში ცხადი სახით გამოთვლილია ზოგიერთი სასრული ჯგუფის მორავას $K(s)^*(BG)$ რგოლები.

ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ სტატიებში:

[1] M. Bakuradze, N. Gachechiladze *Morava K-theory rings of the extensions of* C_2 *by the products of 2-groups, Moscow Math. J.* **16, 4***(2016), 603-619.*

[2] N. Gachechiladze Hilbert functions of Morava $K(2)^*$ *theory rings of some* 2*-groups, Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics.* **66***, (2016) 10-13.*

[3] M. Bakuradze, N. Gachechiladze Some 2*-groups from the view of Hilbert-Poincare polynomials of* $K(2)^*(BG)$*, Tbilisi Mathematical Journal.* **10, 2** *(2017),103-110.*

[1]-ში დათვლილია BG *მაკლასიფიცირებელი სივრცეების მორავას* K*-თეორიის რგოლები, სადაც* G *ჯგუფები არიან* C_2 *ჯგუფის გაფართოებები 2-ჯგუფებით. [2] და [3]-ში გამოკვლეულია თუ რამდენად ძლიერია ჰილბერტ-პუანკარეს პოლინომები მორავას* K*-თეორიის რგოლების განსასხვავებლად. კერძოდ, 32 რიგის ჯგუფების მაგალითებისთვის გამოთვლილია და შედარებულია შესაბამისი ჰილბერტ-პუანკარეს პოლინომები.*

ნაშრომში გამოყენებულია ისეთი მეთოდები, როგორიცაა ტრანსფერის სტაბილური ასახვა, წარმოდგენათა თეორია, ჩერნის მახასიათებელი კლასები, ფორმალური ჯგუფები და სერის სპექტრული მომდევრობა.

ჩვენ შემთხვევაში, ჯგუფები მოცემულია წარმომქმნელებითა და თანაფარდობებით, მაგალითად შემდეგი სახით

$$\begin{aligned}
&G_{34} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^4 = \mathbf{b}^4 = \mathbf{c}^2 = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 1, \mathbf{cac} = \mathbf{a}^{-1}, \mathbf{cbc} = \mathbf{b}^{-1} \rangle,\\
&G_{35} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^4 = \mathbf{b}^4 = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 1, \mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2, \mathbf{cac}^{-1} = \mathbf{a}^{-1}, \mathbf{cbc}^{-1} = \mathbf{b}^{-1} \rangle.\\
&G_{36} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^4 = \mathbf{b}^4 = \mathbf{c}^2 = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = 1, \mathbf{a}^{-1}\mathbf{ba} = \mathbf{b}^{-1}, \mathbf{cac} = \mathbf{a}^{-1} \rangle,\\
&G_{37} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^4 = \mathbf{c}^2 = \mathbf{d}^2 = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = 1, \mathbf{d} = [\mathbf{a}, \mathbf{c}], \mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^2, \mathbf{bab}^{-1} = \mathbf{a}^{-1} \rangle.
\end{aligned}$$

გარდა ზემოთ აღნიშნული კლასიკური მეთოდებისა გამოყენებულია ასევე კომპიუტერული ალგებრა და ტრანსფერის და მახასიათებელი კლასების ურთიერთდამოკიდებულება, რომელიც აღწერილია ბაკურაძე-პრიდის შრომებში [4], [5].

1 მიმოხილვა

1.1 ფორმალური ჯგუფები

ერთგანზომილებიანი კომუტაციური ფორმალური ჯგუფი $F(x, y)$ *კოეფიციენტებით* R *კომუ-ტაციურ რგოლში ეწოდება ხარისხოვან მწკრივს*

$$F(x, y) = \sum \alpha_{ij} x^i y^j, \quad \alpha_{ij} \in R,$$

რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

(i)$F(x, y) = F(y, x)$*;*

(ii)$F(x, 0) = x$*;*

(iii)$F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$.

ყველაზე მარტივი სახე აქვს სინგულარული კოჰომოლოგიების შესაბამის ფორმალურ ჯგუფს. ამ შემთხვევაში $F(x, y) = x + y$, $R = Z$.

ფორმალურ ჯგუფს კომპლექსურ K*-თეორიაში აქვს შემდეგი სახე* $F(x, y) = x + y + \beta xy$*, სადაც* β *არის ბოტის (R. Bott) სიმბოლო, ხოლო კოეფიციენტების* R *რგოლს აქვს სახე:* $K^*(pt) = Z[\beta, \beta^{-1}]$.

ლაზარის (Lazard) [6] თეორემის თანახმად, არსებობს რგოლი Λ *და უნივერსალური ფორმალური ჯგუფი მასზე* $F_\Lambda(x, y) = \sum \alpha_{ij}^\Lambda x^i y^j$*. ეს ნიშნავს, რომ ნებისმიერი კომუტაციური* R *რგოლისთვის და მასზე ფორმალური ჯგუფისთვის* $F_R(x, y) = \sum \alpha_{ij}^R x^i y^j$*, არსებობს ერთადერთი ჰომომორფიზმი* $\varphi : \Lambda \to R$*, ისეთი, რომ* $\varphi(F_\Lambda(x, y)) = F_R(x, y)$ *ანუ* $\varphi(\alpha_{ij}^\Lambda) = \alpha_{ij}^R$.

არსებობს ქვილენის (Quillen) [7] ცნობილი თეორემა, რომლის თანახმად ლაზარის რგოლი Λ *იზომორფულია კომპლექსური კობორდიზმების* MU^* *რგოლის. ეს უკანასკნელი რგოლი ალგებრულად გამოთვალა ნოვიკოვმა (S.P. Novikov) [8] და აჩვენა, რომ* MU^* *იზომორფულია შემდეგ პოლინომთა რგოლის* $Z[x_2, x_4, x_6, \cdots], \quad deg(x_{2i}) = 2i$.

1.2 ტრანსფერის ასახვა

სტაბილური ტრანსფერის ასახვა და მისი გამოყენებები ალგებრული ტოპოლოგიის მთელი დარგია უკვე. საკმარისია გავიხსენოთ, რომ თავის პოპულარულ წიგნში ფ. ადამსი [9] ყველა ალგებრულ ტოპოლოგს ურჩევს ცოტათი მაინც გაეცნოს ტრანსფერს, როგორც დამტკიცებების და გამოყენებების მძლავრ იარაღს.

ტრანსფერები თავიდან გამოჩნდა ჯგუფთა თეორიაში XIX საუკუნეში. შურის (Schur) [10] შრომაში, როგორც ასახვები სასრული ჯგუფის აბელიანიზაციებიდან ქვეჯგუფების აბელიანიზაციებში და შემდეგ განზოგადებული იქნა ჯგუფების სხვა ჰომოლოგიებში და კოჰომოლოგიებში დოლდის (Dold) [12] და სხვების მიერ. ბეკერის და გოტლიბის (Becker and Gottlieb) [13] შრომაში ტრანსფერები აგებული იქნა როგორც მორფიზმები სტაბილურ კატეგორიაში და ამის შემდეგ საყოველთაოდ ცნობილია ჰომოტოპიის თეორიაში.

Tr *სიმბოლოთი ჩვენ ყველგან ავღნიშნავთ სტაბილურ ასახვას*

$$Tr : \Sigma^\infty B \to \Sigma^\infty E,$$

სადაც, $\Sigma^\infty B$ *და* $\Sigma^\infty E$ *აღნიშნავს შესაბამისად ფიბრაციის* B *საბაზო სივრცის და* E *ტოტალური სივრცის სუსპენზიონის სპექტრს. ჩვენ განვიხილავთ ბეკერ-გოტლიბის (Becker-Gottlieb) [13] ტრანსფერს ფიბრაციებისთვის, რომლის ფიბრია კომპაქტური მრავალნაირობა, კერძოდ ჩვენ განვიხილავთ ორმაგი დაფარვების ტრანსფერებს.*

$$Tr : \Sigma^\infty BG \to \Sigma^\infty BH$$

და მათ მიერ გამოწვეულ ჰომომორფიზმებს მორავას K*-თეორიაში*

$$Tr^* : K(s)^*(BH) \to K(s)^*(BG).$$

სადისერტაციო ნაშრომში, ჩვენ ხშირად გამოვიყენებთ ტრანსფერის ფორმალურ თვისებებს. კერძოდ, ე.წ. ფრობენიუსის შებრუნებადობის (Frobenius reciprocity) თანახმად გვაქვს ფორმულა

$$Tr^*(a) \cdot b = Tr^*(a \cdot \rho^*(b)),$$

სადაც $\rho : E \to B$ *დაფარვაა და* $a \in K(s)^*(BH), b \in K(s)^*(BG)$.

1.3 მორავას K-თეორია

კომპლექსურად ორიენტირებული კოჰომოლოგიის ერთი ფრიად საინტერესო მაგალითია მორავას (Morava) თეორია $K(s)^*(-)$ კოეფიციენტებით

$$K(s)^* = F_p[v_s, v_s^{-1}],$$

სადაც p მარტივი რიცხვია, s ნატურალური რიცხვია, F_p არის p რიგის ველი და v_s-ის განზომილებაა $-2(p^s-1)$. როგორც [11] ნაშრომშია შენიშნული, თუ გვაქვს $K(s)^*(-)$ თეორია $s > 1$, მაშინ შესაბამისი ფორმალური ჯგუფისთვის გვაქვს

$$F(x, y) \in K(s)^*[x][[y]].$$

ანუ, $F(x,y)$ ორი ცვლადის ხარისხოვან მწკრივში ერთ-ერთი ცვლადის ფიქსირებულ ხარისხს, მაგალითად y^i-ს წინ კოეფიციენტად აქვს x ცვლადის პოლინომი. იგივე შრომაში მოცემულია $F(x,y)$-ის გამოთვლის მეთოდი $y^{p^{i(s-1)}}$-ის სიზუსტით, ფორმალურ ჯგუფის შესახებ რავენელის (Ravenel) [14] რეკურსიული ფორმულის გამოყენებით. კერძოდ ფორმალურ ჯგუფში

$$F(x, y) = \sum \alpha_{ij} x^i y^j$$

გვაქვს $\alpha_{ij} = 0$, როცა $i > (pq)^n$, $j < q^n$. ეს დაკვირვება გამოყენებულია ჰომოტოპიის თეორიაში 90-იანი წლებიდან ჩარჩენილი ამოცანის გადასაჭრელად. კერძოდ, აღიწეროს სასრული ჯგუფების მაკლასიფიცირებელი სივრცეების კომპლექსურად ორიენტირებულ კოჰომოლოგიებში მულტიპლიკატიური სტრუქტურა მთლიანად ჩერნის მახასიათებელი კლასების ტერმინებში.

სასრული ჯგუფების მულტიპლიკატიური კოჰომოლოგიების შესწავლის უამრავ ცხად მოტივაციას შორის ავღნიშნავთ, რომ შესაბამისი სივრცეების ელიფსური კოჰომოლოგიები იძლევა განსაკუთრებით მორგებულ ტესტებს ელიფსური ობიექტების შესაძლო თვისებებზე. ეს მეთოდი ბაკერის (Baker) [15], თომასის (Thomas) [16] და დევოტოს (Devoto) [17] შრომებშია დემონსტრირებული.

სასრული ჯგუფების მრავალი მაგალითისთვის როგორც, ეს იაგიტას (Yagita) [18, 19, 20, 21], ტეძუკას (Tezuka) [21] და შუსტერის (Schuster)[22, 23, 24, 25] შრომებშია ნაჩვენები, კომპლექსურად ორიენტირებული კოჰომოლოგიები წარმოქმნილია ჩერნის კლასებით. ჰოპკინსმა, კუნმა და რავენელიმ (Hopkins, Kuhn and Ravenel) [26] აჩვენეს რომ, ბევრი ჯგუფი "კარგია"იმ აზრით, რომ მათი მორავას თეორია წარმოქმნილია ქვეჯგუფების კომპლექსური წარმოდგენების ეილერის კლასების ტრანსფერებით. ეს ცხადად მიუთითებს იმაზე, რომ თანაფარდობების ის ნაწილი, რომელიც ტრანსფერის ფორმალური თვისებებით გამოიყვანება, ძირითად როლს უნდა თამაშობდეს მთლიანად მულტიპლიკატიური სტრუქტურის დადგენაში. იაგიტას, ტეძუკას და შუსტერის ზემოთხსენებულ შრომებში მულტიპლიკაციური სტრუქტურა მხოლოდ გარკვეული სიზუსტითაა დადგენილი. ცხადი თანაფარდობების მიღების მიზნით, მომდევნო შრომებში ბრუნეტიმ (Brunetti)[27] და შუსტერმა შემოგვთავაზეს ჩერნის კლასებისაგან განსხვავებული ხელოვნური წარმომქმნელები. მოგვიანებით მაკკრულის და სნაიტის (McClure and Snaith) [28], ჰანტონის (Hunton)[29] და სხვების შრომებში გამოთვლილია სხვადასხვა ორბიტების სივრცეების მორავას კოჰომოლოგიის ჯგუფები. თუმცა განსაკუთრებით საინტერესო სწორედ მულტიპლიკატიური სტრუქტურის აღწერაა წმინდად ჩერნის კლასების ტერმინებში და ამით ცხადი ფორმულების მიღება ტრანსფერისათვის. ამრიგად, ჩვენ მივდივართ ტრანსფერის და მახასიათებელი კლასების ურთიერთქმედების განხილვამდე [4] და [5] შრომების მიხედვით. საწყისი შედეგები მაგალითებისთვის, ამ აზრით პირველი შრომებია [30], [31], [32] და [33].

სასრული ჯგუფების მაკლასიფიცირებელი სივრცეების მორავას თეორიის გამოთვლა ძალზე საინტერესო ამოცანაა ალგებრულ ტოპოლოგიაში. ამის მიუხედავად, ეს ამოცანა ჯერ

არაა დასრულებული და ძირითადად მოცემულია იაგიტას, შუსტერის, ბაკურაძის, პრიდის, ვერშინინის და სხვა შრომებში.

საზოგადოდ, მორავას რგოლი არის ჰომოტოპიური ინვარიანტი, რომელიც საინტერესოა რამოდენიმე მიზეზით. ერთ-ერთი მიზეზი ისაა, რომ განსხვავებით სხვა ჰომოლოგიის თეორიებისგან მორავას თეორია მოიაზრება როგორც პრაქტიკაში საკმარისად გამოთვლადი. თუმცა ცხადი გამოთვლები ძალზე ცოტაა და მიმობნეულია ლიტერატურაში.

მაგალითად, თუ დავუბრუნდებით სასრულ ჯგუფებს, მორავას რგოლების გამოთვლებისთვის ცხადი სახით არ არსებობდა პრაქტიკული მეთოდი გარდა კლასიკური მეთოდებისა. ეს პრაქტიკული მეთოდი, როგორც ჩანს ემყარება ტრანსფერის გამოყენებას. ამის საფუძველს იძლევა ცხადი გამოთვლები სასრული ჯგუფებისათვის: ბევრ მაგალითზე შესაძლებელი გახდა მორავას რგოლების სრულად და ცხადად გამოთვლა ბაკურაძე-პრიდის ტრანსფერის ინტერაქციული მეთოდის გამოყენებით (იხ. ლიტერატურა [31], [32],[34]).

წინამდებარე დისერტაცია კიდევ ერთხელ ადასტურებს ზემოხსენებული მეთოდის პრაქტიკულობას. კერძოდ, ოთხი ჯგუფისთვის ჰალ-სენიორის სიიდან, შესაბამისი ნომრებით 34, 35, 36 და 37, ცხადი სახით გამოთვლილია BG მალკასიფიცირებელი სივრცის მორავას $K(s)^*(BG)$ რგოლი. ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია [1] შრომაში. კერძოდ, ამ ორი ჯგუფისთვის მორავას რგოლი არის ექვსი ცვლადის პოლინომთა რგოლის ფაქტორი იდეალით, რომლისთვისაც ჩამოთვლილია ცხადი წარმომქმნელები.

ვთქვათ, $K(s)^*(BG)$ არის $s > 1$ სიმაღლის მორავას K-თეორია, $p = 2$. შევნიშნოთ, რომ [35]-ის თანახმად, კოეფიციენტთა რგოლი $K(s)^*(pt)$ არის ლორანის ერთი ცვლადის პოლინომთა რგოლი $\mathbb{F}_2[v_s, v_s^{-1}]$, სადაც $\mathbb{F}_2$ არის ორელემენტიანი ველი და $deg(v_s) = -2(2^s - 1)$. ისე, რომ კოეფიციენტთა რგოლი არის გრადუირებული ველი და მაშასადამე ნებისმიერი გრადუირებული მოდული მათზე არის თავისუფალი. ამრიგად, მორავას K-თეორიისათვის ადგილი აქვს კიუნეტის იზომორფიზმს. კერძოდ, ციკლური 2-ჯგუფებისთვის გვაქვს:

$$K(s)^*(BC_{2^n} \times BC_{2^m}) = \mathbb{F}_2[v_s, v_s^{-1}][u, v]/(u^{2^{ns}}, v^{2^{ms}}),$$

სადაც x და y კანონიკური წრფივი კომპლექსური ფიბრაციების ეილერის კლასებია.

გავიხსენოთ [26]-დან შემდეგი განსაზღვრება.

a) G სასრული ჯგუფისთვის, $x \in K(s)^*(BG)$ ელემენტს ეწოდება კარგი თუ ის არის G ჯგუფის რაიმე კომპლექსური ქვეწარმოდგენის ეილერის კლასის ტრანსფერი. ე.ი. არის $Tr^*(e(\rho))$ ფორმის, სადაც ρ არის $H < G$ ქვეჯგუფის კომპლექსური წარმოდგენა, $e(\rho) \in K(s)^*(BH)$ არის მისი ეილერის კლასი. (ანუ არის უმაღლესი ჩერნის კლასი, რადგან $K(s)^*$ არის კომპლექსურად ორიენტირებული თეორია), და $Tr : BG \to BH$ არის სტაბილური ტრანსფერის ასახვა.

(b) G არის კარგი თუ $K(s)^*(BG)$ არის წარმომქმნილი კარგი ელემენტებით როგორც $K(s)^*$–მოდული.

[23, 24, 25, 19] ლიტერატურაში გარკვეულ როლს თამაშობს კარგი ჯგუფები იმ აზრით, რომ $K(s)^{odd} = 0$ (პრინციპში ეს უფრო სუსტი პირობაა, ვიდრე ჰოპკინს-კუნ-რავენელის აზრით მოცემული პირობა).

[36]-ში კრიზმა დაამტკიცა შემდეგი თეორემა სერის სპექტრული მიმდევრობის [26] შესახებ

$$E_2 = H^*(BC_p, K(s)^*(BH)) \Rightarrow K(s)^*(BG),$$

რომელიც ასოცირებულია ჯგუფურ გაფართოებასთან

$$1 \to H \to G \to C_p \to 1$$

სადაც, G არის p-ჯგუფი და $H \lhd G$ არის მისი ნორმალური ქვეჯგუფი, ისე, რომ $K(s)^{odd}(BH) = 0$. კერძოდ, [36] კრიზმა დაამტკიცა, რომ $K(s)^{odd}(BG) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ მისი

მთელი მორავის K- თეორია $\tilde{K}(s)^*(BH)$ არის გადანაცვლებათა მოდული $G/H \cong C_p$ ჯგუფის მოქმედების მიმართ. კრიზმა [36]-ში და იაგიტამ [19]-ში დაამტკიცეს, რომ ციკლური p-ჯგუფების ნებისმიერი გაფართოება ელემენტარული აბელური p-ჯგუფით აკმაყოფილებს ლუწგანზომილებიანობის ჰიპოთეზას. 2-ზე მეტი მარტივი p-ებისთვის, ჯგუფებს, რომელთა p-რანკი არის 2 აქვთ ლუწი მორავას K-თეორია, როგორც ეს ნაჩვენებია ტეძუკა-იაგიტას [21] და იაგიტას [20] შრომებში. უფრომეტიც, იაგიტამ ასევე დაამტკიცა, რომ ამ ჯგუფების მორავის K- თეორია წარმოქმნილია ეილერის კლასების ტრანსფერებით და ამიტომ არის კარგი ჰოპკინს-კუნ-რავენელის აზრით. ჰანტონმა [29] გამოიყენა "unitary-like embeddings"იმის საჩვენებლად, რომ თუ $K(s)^*(BH)$ კონცენტრირებულია ლუწ განზომილებებში მაშინ ასევე იქცევა $K(s)^*(BH \wr C_p)$. ამ ფაქტის HKR აზრით დამოუკიდებელი დამტკიცება მოცემულია [26] ნაშრომში;

შესაძლოა განვიხილოთ კარგი ჯგუფები უფრო მკაცრი აზრითაც, ანუ $K(s)^*(BG)$ წარმოქმნილია კარგი ელემენტებით, ჩერნის (Chern) მახასიათებელი კლასებით, როგორც $K(s)^*$-ალგებრა და ყველა წარმომქმნელი თანაფარდობები არის ტრანსფერის და მახასიათებელი კლასების ფორმალური თვისებების შედეგი.

ჩერნის i-ური კლასი G ჯგუფის ყოველ კომპლექსურ წარმოდგენას ξ-ს შეუსაბამებს ელემენტს $c_i(\xi) \in K(s)^{2i}(BG)$. ჩერნის კლასებს აქვთ ფორმალური თვისებები, რომლითაც ორი წარმოდგენის ჩერნის კლასების საშუალებით გამოითვლება მათი ჯამის და ტენზორული ნამრავლის ჩერნის კლასები. ქვემოთ ხშირად ვისარგებლებთ ამ ფორმალური თვისებებით, ფორმალური ჯგუფის მეთოდით და უიტნის (Whitney) ფორმულით.

1.4 ვექტორული ფიბრაციები

ფიბრაცია ეწოდება სამეულს (X, B, p), სადაც, X და B ტოპოლოგიური სივრცეებია, ხოლო p არის ზე ასახვა $p : X \to B$. B -ს ეწოდება ფიბრაციის ბაზა, X-ს ეწოდება ფიბრაციის ტოტალური სივრცე, p ასახვას ეწოდება ფიბრაციის პროექცია, ხოლო $p^{-1}(x)$-ს ეწოდება ფიბრი x წერტილში.

ჩვენ განვიხილავთ ლოკალურად ტრივიალურ ფიბრაციებს, ანუ $\forall x \in B$, $\exists U_x$ მიდამო, ისეთი, რომ

$$p^{-1}(U_x) \cong U_x \times p^{-1}(x).$$

ვთქვათ, $\forall x \in B$-სთვის $p^{-1}(x)$-ში გვაქვს n განზომილებიანი კომპლექსური ვექტორული სივრცის სტრუქტურა. ისე, რომ $\forall z \in U_x \cap U_y$, $U_z \subset U_x \cap U_y$ ჩადგმები

$$p^{-1}(U_z) \cong U_z \times p^{-1}(z) \hookrightarrow p^{-1}(U_x) \cong U_x \times p^{-1}(x)$$

და

$$p^{-1}(U_z) \cong U_z \times p^{-1}(z) \hookrightarrow p^{-1}(U_y) \cong U_y \times p^{-1}(y)$$

$p^{-1}(z) \cong C^n$- ზე შეზღუდვისას გვაძლევენ ვექტორული სივრცეების იზომორფიზმებს:

$$p^{-1}(z) \to p^{-1}(x) \text{ და } p^{-1}(z) \to p^{-1}(y).$$

ორი ვექტორული ფიბრაციის (X_1, B_1, p_1) და (X_2, B_2, p_2) პირდაპირი ნამრავლი არის ვექტორული ფიბრაცია, $(X_1 \times X_2, B_1 \times B_2, p_1 \times p_2)$, ანუ ამ ფიბრაციის ბაზა, ტოტალური სივრცე, პროექცია და ფიბრი არის მოცემული ორი ფიბრაციის შესაბამისი ელემენტების პირდაპირი ნამრავლი.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ვექტორული ფიბრაცია (X, B, p) და ვთქვათ, გვაქვს რაიმე ასახვა $f : B' \to B$. f ასახვით ინდუცირებული ფიბრაცია ეწოდება (X', B', p') ფიბრაციას, სადაც, $X' \subset B' \times X$, შემდეგ $p' : X' \to B'$ არის პროექცია პირველ კომპონენტზე და კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[d, "p'"] & X \arrow[d, "p"] \\
B' \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

სადაც $X' \subset B' \times X \to X$ არის ასახვა მეორე თანამამრავლზე.

ფიბრაციების უიტნის ჯამი *განისაზღვრება შემდეგნაირად:*

ვთქვათ, მოცემულია ორი ვექტორული ფიბრაცია $\xi_1 = (X_1, B, p_1)$ და $\xi_2 = (X_2, B, p_2)$, რომელთაც აქვთ ერთი და იგივე ფიბრაციის ბაზა. უიტნის ჯამი აღინიშნება $\xi_1 \oplus \xi_2$, რომელიც მიიღება $X_1 \times X_2 \to B \times B$ ფიბრაციისგან დიაგონალური ასახვით $Diag : B \subset B \times B$. სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ: $\xi_1 \oplus \xi_2 := Diag^*(\xi_1 \times \xi_2) \to B$,

სადაც $Diag$ აღნიშნავს დიაგონალურ ასახვას $b \to (b, b)$. n და m განზომილებიანი ვექტორული ფიბრაციების უიტნის ჯამის ფიბრი იზომორფულია $C^n \oplus C^m = C^{n+m}$ ვექტორული სივრცის.

ფიბრაციების ტენზორული ნამრავლი *განისაზღვრება შემდეგნაირად:*

ვთქვათ, მოცემულია ორი ვექორული ფიბრაცია $\xi_1 = (X_1, B, p_1)$ და $\xi_2 = (X_2, B, p_2)$ ერთი და იგივე ფიბრაციის B ბაზით. ვექორული ფიბრაციების ტენზორული ნამრავლი $\xi_1 \otimes \xi_2 \to B$ არის ვექტორული ფიბრაცია B-ზე, რომლის ფიბრი ნებისმიერ წერტილზე არის X_1 და X_2-ს შესაბამისი ფიბრების, როგორც ვექტორული სივრცეების, ტენზორული ნამრავლი.

1.5 ჩერნის მახასიათებელი კლასები მორავას K-თეორიაში

განსაზღვრება: ჩერნის მახასიათებელი სრული კლასი მორავას $K(s)^*(-)$ თეორიაში ყოველ კომპლექსურ n-განზომილებიან ფიბრაციას X ტოპოლოგიურ სივრცეზე $\xi^n \to X$-ს შეუსაბამებს გამოსახულებას

$$C(\xi^n) = 1 + c_1(\xi^n) + c_2(\xi^n) + \cdots + c_n(\xi^n).$$

ამ გამოსახულების შესაკრებს $c_i(\xi^n) \in K(s)^{2i}(X)$ ეწოდება ξ^n ფიბრაციის i-ური ჩერნის კლასი.

ჩერნის კლასს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. *კარტანის ფორმულა. თუ მოცემული გვაქვს ორი ვექტორული ფიბრაცია ξ^n და η^m მაშინ მათი პირდაპირი ჯამის სრული ჩერინის კლასი გამოითვლება ფორმულით:*

$$C(\xi^n \oplus \eta^m) = C(\xi^n)C(\eta^m),$$

ანუ

$$C_k(\xi^n \oplus \eta^m) = \sum_{i+j=k} C_k(\xi^n)C_k(\eta^m),$$

სადაც $k = 1, \cdots, n+m$.

2. *ξ და η წრფივი კომპლექსური ფიბრაციებისათვის მათი ტენზორული ნამრავლის ჩერნის კლასი გამოითვლება ფორმულით:*

$$c_1(\xi \otimes \eta) = F(c_1(\xi), c_1(\eta)),$$

სადაც F არის ფორმალური ჯგუფი მორავას K-თეორიაში.

მაგალითად, C_n ციკლური ჯგუფის მაკლასიფიცირებელი სივრცისთვის გვაქვს კანონიკური კომპლექსური წრფივი ფიბრაცია ξ, რომლის წარმოდგენაა $z \in C_{2^n}$, $z \to e^{2\pi i/2^n}$. ავღნიშნოთ ξ ფიბრაციის ჩერნის კლასი $u = c_1(\xi)$. რადგან $\xi^{2^n} = 1$ ამიტომ $[2^n]_F(u) = 0$ ანუ 2^n-ჯერ F-ფორმალური ჯამი ტრივიალურია. მორავას K-თეორიაში $[2^n]_F(u) = v_s u^{2^{ns}}$. ამიტომ

$$K(s)^*(BC_{2^n}) = K(s)^*[u]/u^{2^{ns}}.$$

საზოგადოდ, ორი ფიბრაციის ტენზორული ნამრავლის $\xi^n \otimes \eta^m$ სრული ჩერნის კლასი $C(\xi^n \otimes \eta^m)$ გამოითვლება ე.წ. გახლეჩის პრინციპის გამოყენებით. გახლეჩის პრინციპი მდგომარეობს შემდეგში: ჩავწეროთ ξ^n და η^m ფიბრაციები ფორმალურად, როგორც წრფივი ფიბრაციების პირდაპირი (უიტნის) ჯამები:

$$\xi^n = \xi_1 \oplus \xi_2 \oplus \cdots \oplus \xi_n; \quad \eta^m = \eta_1 \oplus \eta_2 \oplus \cdots \oplus \eta_m.$$

აღვნიშნოთ $u_i = c_1(\xi_i)$, $i = 1, \cdots, n$ და $v_i = c_1(\eta_i)$, $i = 1, \cdots, m$.

შედეგად, ტენზორული ნამრავლი ჩაიწერება $n \cdot m$ ცალი წრფივი ფიბრაციის პირდაპირი ჯამის სახით:

$$\xi^n \otimes \eta^m = \xi_1 \otimes \eta_1 \oplus \cdots \oplus \xi_n \otimes \eta_m.$$

ამ გამოსახულებაში თითოეული შესაკრებისთვის ჩერნის კლასი გამოითვლება ფორმალური ჯგუფის საშუალებით, ე.ი.

$$c_1(\xi_i \otimes \eta_j) = F(u_i; v_j),$$

ხოლო მთლიანი ჯამის სრული ჩერნის კლასი გამოითვლება კარტანის ფორმულით.

$$C(\xi^n\otimes\eta^m)=C(\xi_1\otimes\eta_1)\cdots C(\xi_n\otimes\eta_m)=(1+F(u_1;v_1))\cdots(1+F(u_n;v_m)).$$

აქ მარჯვენა მხარეში ელემენტარულ სიმეტრიულ პოლინომებს $\sigma_i(u_1,\cdots,u_n)$*-ს შევცვლით* $c_i(\xi^n)$*, ხოლო* $\sigma_i(v_1,\cdots,v_m)$*-ს შევცვლით* $c_i(\eta^m)$*, ამრიგად მივიღებთ* $\xi^n\otimes\eta^m$ *ტენზორული ნამრავლის ჩერნის კლასების გამოსახულებას* ξ^n *და* η^m *ჩერნის კლასებში.*

გახლეჩის პრინციპის თანახმად ეს მოქმედება კანონიერია, ანუ არსებობს თეორემა დროშების ფიბრაციის შესახებ.

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r] \arrow[d, "f^*(\lambda^n)"] & E \arrow[d, "\lambda^n"] \\ FL \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

ამ თეორემის თანახმად, ნებისმიერი $\xi^n\to X$ *ვექტორული ფიბრაციისთვის არსებობს ე.წ. დროშების ფიბრაცია* $f:FL\to X$ *ისე, რომ* f *ასახვით ინდუცირებული ფიბრაცია* E'*-ზე გაიშლება წრფივი ფიბრაციების ჯამად* $\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_n$*. აგრეთვე* f *ასახვით ინდუცირებული ჰომომორფიზმი მორავას* K *თეორიაში არის მონომორფიზმი.*

1.6 ლიტერატურის მიმოხილვა

32 რიგის ჯგუფებს შორის 34, 39 და 41 ნომრიანი ჯგუფები შეიძლება წარმოდგენილი იყოს როგორც ნახევრადპირდაპირი ნამრავლი $(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$, *ხოლო* $G = G_{36}, G_{37}, G_{38}$ *ჯგუფები როგორც* $(C_4 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_2$.

ჩვენ განვიხილავთ მაგალითებს: $G_{34}, \cdots, G_{37}$ *და გამოვიყენებთ [37] თეორემას, კარგი ჯგუფების შესახებ HKR აზრით, რომელიც ჩვენს შემთხვევაში ასე იკითხება*

თეორემა 1.1. *ვთქვათ,* H_i *და* G_i *არის სასრული 2-ჯგუფები,* $i = 1, 2$, *ისეთი, რომ* H_i *არის კარგი და* G_i *შეესატყვისება შემდეგ გაფართოებას:* $1 \to H_i \to G_i \to C_2 \to 1$.

ვთქვათ G *არის შემდეგი გაფართოება* $1 \to H \to G \to C_2 \to 1$, C_2 *ჯგუფის დიაგონალური მოქმედებით შეუღლების საშუალებით* $H = H_1 \times H_2$*-ზე. ავღნიშნოთ:*

$Tr^* = Tr^*_\varrho : K(s)^*(BH) \to K(s)^*(BG)$, *ტრანსფერის ჰომომორფიზმი, ასოცირებული 2-დაფარვასთან* $\varrho = \varrho(H, G) : BH \to BG$,

$Tr^*_i = Tr^*_{\varrho_i} : K(s)^*(BH_i) \to K(s)^*(BG_i)$, *ტრანსფერის ჰომომორფიზმი, ასოცირებული 2-დაფარვასთან* $\varrho_i = \varrho(H_i, G_i) : BH_i \to BG_i$, $i = 1, 2$,

$\rho_i : BG \to BG_i$ *არის ასახვა, ინდუცირებული* $H \to H_i$ *პროექციით* i*-ურ თანამამრავლზე და ვთქვათ* ρ^* *არის*

$$(\rho_1, \rho_2)^* : K(s)^*(BG_1 \times BG_2) \to K(s)^*(BG)$$

ასახვის შეზღუდვა $K(s)^*(BG_1)/ImTr_1^* \otimes K(s)^*(BG_2)/ImTr_2^*$*-ზე. მაშინ*

i) თუ ყოველი G_i *არის კარგი, მაშინ* G*-ც კარგია.*

ii) $K(s)^*(BG)$ *წარმოქმნილია, როგორც* $K(s)^*(pt)$*-მოდული,* $ImTr^*$*-ის და* $Im\rho^*$*-ის ელემენტებით.*

ჩვენი მაგალითებისთვის $G/H \cong C_2$*-ის მოქმედება არის დიაგონალური, ანუ უფრო მარტივი ვიდრე* $G_{38}, \cdots, G_{41}$ *ჯგუფებისთვის [33], მაგრამ, როგორც ვნახავთ მათთვის მორავას* K*-თეორიის რგოლური სტრუქტურა იმავე სირთულისაა.*

იმის დასამტკიცებლად, რომ ქვემოთ მოყვანილი 2.1 და 3.1 თეორემები ნამდვილად გვაძლევენ რგოლურ სტრუქტურას, ჩვენ უნდა

(i) შევამოწმოთ მოყვანილი თანაფარდობები და შემდეგ დავადგინოთ ორი ფაქტი:

(ii) განსაზღვრული კლასები არიან წარმომქმნელები და

(iii) თანაფარდობების სია სრულია.

(i) ნაბიჯისთვის ჩვენი იარაღი არის ტრანსფერის ჰომომორფიზმის ფორმალური თვისებები.

ვთქვათ $H \lhd G$ *არის 2-ინდექსის. განვიხილოთ ორმაგი დაფარვა* $\varrho : BH \to BG$. *ვთქვათ*

$$Tr^* = Tr^*_\varrho = Tr^*(H, G) : K(s)^*(BH) \to K(s)^*(BG)$$

იყოს ასოცირებული ტრანსფერის ჰომომორფიზმი, რომელიც ინდუცირებულია სტაბილური ტრანსფერის ასახვით. იხილეთ [9], [38], [12].

ტრანსფერის ჰომომორფიზმის ფორმალური თვისებებიდან ჩვენ ხშირად ვისარგებლებთ ფრობენიუსის შებრუნებადობის თვისებით და ორმაგი მოსაზღვრე კლასების ფორმულით, რომელთა შესახებაც შეგიძლიათ იხილოთ [39]შრომაში.

ჩვენ ასევე დაგვჭირდება ტრანსფერის ფორმულა [4] შრომიდან, რომელიც არ მუშაობს მორავას K*-თეორიაში* $s = 1$*-სთვის. მაშასადამე ჩვენ განვიხილავთ* $s > 1$*-ს. ასევე მთელ სადისერტაციო ნაშრომში ნაგულისხმებია, რომ* $v_s = 1$.

ვთქვათ, $\xi \to BH$ არის კომპლექსური წრფივი ფიბრაცია და $\xi_\varrho = Ind_H^G(\xi)$ არის მისი ატიას ტრანსფერი. მაშინ

$$c_1(\xi_\varrho) = c_1(\psi) + \sum_{i=1}^{s-1} c_1(\psi)^{2^s-2^i} c_2(\xi_\varrho)^{2^{i-1}} + Tr^*(c_1(\xi)), \tag{1}$$

სადაც $\psi \to BG$ არის $B\mathbb{Z}/2$-ზე კანონიკური წრფივი ფიბრაციიდან ინდუცირებული ფიბრაცია π მაკლასიფიცირებელი ასახვით $\pi : BG \to B\mathbb{Z}/2$.

ვთქვათ, $H = C_4 \times C_4$ არის 2-ინდექსის ნორმალური ქვეჯგუფი G-ში; $\xi_i \to BH$ არის კანონიკური წრფივი ფიბრაცია ინდუცირებული i-ურ თანამამრავლზე პროექციით; $u = c_1(\xi_1)$, $v = c_1(\xi_2)$, $x_i = c_i(\xi_i)$! ამ ჩერნის კლასებისათვის (1) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$Tr^*(u) = c + x_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}} \tag{2}$$

და

$$Tr^*(v) = c + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}}. \tag{3}$$

მორავას K-თეორიაში ფორმალური ჯგუფებისთვის ადგილი აქვს შემდეგ აპროქსიმაციის ფორმულას, იხ.([40], ლემა 2.2 ii)).

$$F(x, y) = x + y + \Phi(x, y)^{2^{s-1}}, \tag{4}$$

სადაც $\Phi(x, y) = xy + (xy)^{2^{s-1}}(x + y)$ მოდულით $(xy)^{2^{s-1}}(x + y)^{2^{s-1}}$.

ჩვენ ასევე დაგვჭირდება შემდეგი ლემა [33]-დან:

ლემა 1.2. *ორგანზომილებიანი კომპლექსური ვექტორული ფიბრაციის ტენზორულ კვადრატს, $\zeta^{\otimes 2}$-ს აქვს შემდეგი სრული ჩერნის კლასი:*

$$C(\zeta^{\otimes 2}) = (1 + c_1^2(det\zeta))(1 + c_1^{2^s}(\zeta) + c_2^{2^s}(\zeta)).$$

(ii) ნაბიჯისთვის ჩვენი იარაღი არის სერის სპექტრული მიმდევრობა (დაწვრილებით შეგიძლიათ იხილოთ შემდეგ შრომებში: [41], [42], [26])

$$\{E_2^{*,*}(BG)\} = H^*(BC_2, K(s)^*(BH)) \Rightarrow K(s)^*(BG) \tag{5}$$

რომელიც ასოცირებულია ჯგუფის გაფართოებასთან $1 \to H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} C_2 \to 1$.

აქ $H^*(BC_2, K(s)^*(BH))$-ით აღნიშნულია ჩვეულებრივი C_2-ის კოჰომოლოგია კოეფიციენტებით $\mathbb{F}_2[C_2]$-მოდულ $K(s)^*(BH)$-ში. სადაც C_2-ის მოქმედება ინდუცირებულია G ჯგუფში შეუღლებით.

$K(s)(BH)$ როგორც C_2-მოდული არის პირდაპირი ჯამი თავისუფალი F და ტრივიალური T მოდულებისა.

გავითვალისწინოთ, რომ

$$H^i(BC_2, F) = \begin{cases} [F]^{C_2} & \text{როცა } i = 0 \\ 0 & \text{როცა } i > 0. \end{cases}$$

და

$$H^*(BC_2, T) = H^*(BC_2) \otimes T.$$

გავიხსენოთ, რომ $E_2^{0,*}$ *არის იზომორფული* $[K(s)^*(BH)]^{C_2}$ *ინვარიანტების ქვეჯგუფის*

$$\varrho^* : K(s)^*(BG) \to K(s)^*(BH)$$

ჰომომორფიზმით. ასევე, სპექტრალური მიმდევრობის π^**-თი* $E_2^{*,*}(BG)$ *წევრი არის* $E_2^{*,*}(BC_2)$*-მოდული, რომლის ატია-ჰირცებრუხის სპექტრული მიმდევრობა იკრიბება* $K(s)^*(BC_2)$*-სკენ.*

ტრანსფერის ფრობენიუსის შებრუნებადობის თვისება გვეუბნება, რომ $\varrho^* Tr^*$ *კომპოზიცია არის კვალის ასახვა*

$$\varrho^* Tr^* = 1 + t, \text{ სადაც } t \text{ არის წარმომქმნელი } t \in G/H \cong C_p. \qquad (6)$$

ცხადია, $\varrho^* Tr^*$ *კვალის ასახვა ყოველთვის ასახავს* $K(s)^*(BH)$*-ის კარგ ელემენტებს* $[F]^{C_2}$*-ზე. მაშასადამე,* G *არის კარგი ჯგუფი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* T *დაფარულია* $K(s)^*(BG)$*-ის კარგი ელემენტების* ϱ^* *ანასახით.*

ზოგადად, თუ ვიმოქმედებთ უხეშად, $s = 2$*-სთვისაც კი, ეს მოითხოვს სერიოზულ გამოთვლით ძალისხმევას, იხ. [39] გვ.78. ჩვენ შეგვიძლია გავამარტივოთ ეს ამოცანა სპეციალური ბაზისის შეთავაზებით* $K(s)^*(BH)$*-ში. ეს მარტივი, მაგრამ მოსახერხებელი იდეა პირველად განხორციელდა ბაკურაძე-ჯიბლაძის [33]შრომაში.*

საბოლოოდ, ჩვენ უნდა შევამოწმოთ (iii) პუნქტი თანაფარდობების სისრულე რანგის გამოთვლით, რაც უდრის $\chi_s(G) = \frac{1}{2}16^s - \frac{1}{2}4^s + 8^s$ *და დათვლილია [23] შრომაში, ჰოპკინს-კუნრავენელის აზრით ეილერის მახასიათებლების ფორმულის გამოყენებით.*

2 მორავას K- თეორიის რგოლები G_{36}, G_{37} ჯგუფებისთვის

G_{38} ჯგუფისთვის, რომელიც არის ნახევრადპირდაპირი ნამრავლი $\cong (C_4 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_2$ მორავას რგოლი გამოთვლილია [33] შრომაში. G_{36}, G_{37} ჯგუფისთვის მორავას რგოლის თანაფარდობები მსგავსი მეთოდებით შეიძლება მივიღოთ (იხილეთ პარაგრაფი 4.1). ის ფაქტი, რომ ჩერნის კლასების ტრანსფერები წარმომქმნელები არიან (იხილეთ პარაგრაფი 4.4) აქ დამტკიცებულია განსხვავებული მოსაზრებებით.

გავიხსენოთ შემდეგი ჯგუფები, რომლების მოცემულია წარმომქმნელებითა და თანაფარდობებით:

$$G_{36} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^4 = \mathbf{b}^4 = \mathbf{c}^2 = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = 1, \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{a} = \mathbf{b}^{-1}, \mathbf{c}\mathbf{a}\mathbf{c} = \mathbf{a}^{-1} \rangle,$$
$$G_{37} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^4 = \mathbf{c}^2 = \mathbf{d}^2 = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = 1, \mathbf{d} = [\mathbf{a}, \mathbf{c}], \mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^2, \mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{a}^{-1} \rangle.$$

ვთქვათ $H \cong C_4 \times C_2 \times C_2$ არის მაქსიმალური აბელური ქვეჯგუფი G-ში:

$$H = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}^2 \rangle \text{ როცა } G = G_{36};$$

$$H = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle \text{ როცა } G = G_{37}.$$

ვთქვათ, λ, μ და ν არიან კომპლექსური წრფივი ფიბრაციები BH-ზე, კანონიკური კომპლექსური წრფივი ფიბრაციიდან ინდუცირებული, შესაბამისად H-ის პირველ, მეორე და მესამე თანამამრავლზე პროექციით.

$H \lhd G_{36}$ ქვეჯგუფისთვის,

$$\lambda(\mathbf{b}) = i, \nu(\mathbf{a}^2) = \mu(\mathbf{c}) = -1, \lambda(\mathbf{a}^2) = \lambda(\mathbf{c}) = \nu(\mathbf{b}) = \nu(\mathbf{c}) = \mu(\mathbf{b}) = \mu(\mathbf{a}^2) = 1,$$

და $H \lhd G_{37}$ ქვეჯგუფისთვის,

$$\lambda(\mathbf{b}) = i, \mu(\mathbf{c}) = \nu(\mathbf{d}) = -1, \lambda(\mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{d}) = \mu(\mathbf{b}) = \mu(\mathbf{d}) = \nu(\mathbf{b}) = \nu(\mathbf{c}) = 1.$$

G-ს ფაქტორჯგუფი ცენტრით $Z \cong C_2^2$ არის C_2^3-ის იზომორფული. G-ს პროექცია C_2^3 ჯგუფის პირველ, მეორე და მესამე თანამამრავლებზე ინდუცირებს წრფივ ფიბრაციებს BG-ზე, რომელთაც ავღნიშნავთ შესაბამისად α, β და γ სიმბოლოებით. ამრიგად გვაქვს

$$\alpha(b) = \beta(c) = \gamma(a) = -1, \;\; \alpha(a) = \alpha(c) = \beta(a) = \beta(b) = \gamma(b) = \gamma(c) = 1.$$

ჩერნის კლასები ავღნიშნოთ შემდეგნაირად:

$$x_i = c_i(Ind_H^G(\nu)); \;\; y_i = c_i(Ind_H^G(\lambda));$$

$$a = \begin{cases} c_1(\alpha), \text{ როცა } G = G_{36}\ , \\ c_1(\alpha\gamma), \text{ როცა } G = G_{37}, \end{cases}$$

და ორივე ჯგუფისთვის:

$$b = c_1(\beta), \;\; c = c_1(\gamma).$$

ვთქვათ, $Tr^* : K(s)^*(BH) \to K(s)^*(BG)$ არის $\rho : BH \to BG$ ორმაგ დაფარვასთან ასოცირებული ტრანსფერის ჰომომორფიზმი (იხ. [9] და პარაგრაფი 1.2). ავღნიშნოთ

$$T = Tr^*(uv), \text{ სადაც } u = c_1(\nu); \;\; v = c_1(\lambda).$$

სადისერტაციო ნაშრომის ერთ-ერთი ძირითადი შედეგი არის შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2.1. *ვთქვათ, G არის ერთ-ერთი შემდეგი ჯგუფიდან G_{36}, G_{37}. მაშინ*
i) $K(s)^*(BG) \cong K(s)^*[a, b, c, x_2, y_2, T]/R$, *სადაც R იდეალია წარმომქმნელებით*
a^{2^s}, b^{2^s}, c^{2^s},
$c(c + x_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}})$, $\;c(c + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}})$,
$a(a + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} a^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}})$, $\;b(b + x_1 + \sum_{i=1}^{s-1} b^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}})$,
$(c + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}})(b + x_1 + \sum_{i=1}^{s-1} b^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}}) + b^{2^s-1}T$,
$(c + x_1 + v_s \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}})(a + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} a^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}}) + a^{2^s-1}T$,
$T^2 + Tx_1y_1 + x_2y_1(c + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}}) + x_1y_2(c + x_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}})$,
$T(b + x_1 + \sum_{i=1}^{s-1} b^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}}) + b^{2^s-1}x_2(c + y_1)$,
$T(a + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} a^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}}) + a^{2^s-1}y_2(c + x_1)$, cT, *და*

$$x_2^{2^s} + \begin{cases} c^2 + bc & \text{როცა } G = G_{36}, \\ bc & \text{როცა } G = G_{37}, \end{cases}$$

$$y_2^{2^s} + \begin{cases} a^2 + ac & \text{როცა } G = G_{36}, \\ a^2 + ac + c^2 & \text{როცა } G = G_{37}, \end{cases}$$

სადაც

$$x_1 = (x_2 + x_1 x_2^{2^{s-1}})^{2^{s-1}} + \begin{cases} b & \text{როცა } G = G_{36} \\ b + c + (bc)^{2^{s-1}} & \text{როცა } G = G_{37}, \end{cases}$$

$$y_1 = (y_2 + y_1 y_2^{2^{s-1}})^{2^{s-1}} + \begin{cases} c & \text{როცა } G = G_{36} \\ 0 & \text{როცა } G = G_{37}. \end{cases}$$

ii) სხვა თანაფარდობებია:
$a^2c = ac^2, \;\; b^2c = bc^2, \;\; x_1^{2^s} = b^{2^{s-1}} c^{2^{s-1}}, \;\; y_1^{2^s} = a^{2^{s-1}} c^{2^{s-1}}.$

1.6 პარაგრაფიდან ცნობილია, რომ მორავას რგოლის $\chi_s(G)$ რანგი ტოლია

$$\chi_s(G) = \frac{1}{2}16^s - \frac{1}{2}4^s + 8^s.$$

ანუ როცა $s = 3$ რანგი ტოლია 2528.

2.1 თეორემაში მოცემული რგოლის რანგის შემოწმება კომპიუტერული ალგებრის პროგრამაში, სინგულარში, $K(s)^*(BG_{36}), s = 3$.

> $ringR = 2, (T, y_1, x_1, b, a, x_2, y_2, c), dp;$

>$idealII = (a^8, b^8, c^8, x_1 + x_2^4 + x_1^4 x_2^{16} + b, y_1 + y_2^4 + y_1^4 y_2^{16} + c, c(c + x_1 + c^6 x_2 + c^4 x_2^2), c(c + y_1 + c^6 y_2 + c^4 y_2^2), a(a + y_1 + a^6 y_2 + a^4 y_2^2), b(b + x_1 + b^6 x_2 + b^4 x_2^2), y_2^8 + a^2 + ac, x_2^8 + c^2 + bc, (c + x_1 + c^6 x_2 + c^4 x_2^2)(a + y_1 + a^6 y_2 + a^4 y_2^2) + a^7 T, (c + y_1 + c^6 y_2 + c^4 y_2^2)(b + x_1 + b^6 x_2 + b^4 x_2^2) +$

$b^7T, T^2+Tx_1y_1+x_2y_1(c+y_1+c^6y_2+c^4y_2^2)+x_1y_2(c+x_1+c^6x_2+c^4x_2^2), T(b+x_1+b^6x_2+b^4x_2^2)+b^7x_2(c+y_1), T(a+y_1+a^6y_2+a^4y_2^2)+a^7y_2(c+x_1), cT)$;

> vdim(std(II));

2528

2.1 თეორემაში მოცემული რგოლის რანგის შემოწმება პროგრამა სინგულარში, $K(s)^*(BG_{37}), s=3$.

>$ringR=2,(T,y_1,x_1,b,a,x_2,y_2,c),dp;$

>$idealI=(a^8,b^8,c^8,x_1+x_2^4+x_1^4x_2^{16}+b+c+b^4c^4, y_1+y_2^4+y_1^4y_2^{16}, c(c+x_1+c^6x_2+c^4x_2^2), c(c+y_1+c^6y_2+c^4y_2^2), a(a+y_1+a^6y_2+a^4y_2^2), b(b+x_1+b^6x_2+b^4x_2^2), y_2^8+a^2+ac+c^2, x_2^8+bc, (c+x_1+c^6x_2+c^4x_2^2)(a+y_1+a^6y_2+a^4y_2^2)+a^7T, (c+y_1+c^6y_2+c^4y_2^2)(b+x_1+b^6x_2+b^4x_2^2)+b^7T, T^2+Tx_1y_1+x_2y_1(c+y_1+c^6y_2+c^4y_2^2)+x_1y_2(c+x_1+c^6x_2+c^4x_2^2), T(b+x_1+b^6x_2+b^4x_2^2)+b^7x_2(c+y_1), T(a+y_1+a^6y_2+a^4y_2^2)+a^7y_2(c+x_1), cT)$;

> vdim(std(I));

2528

3 მორავას K- თეორიის რგოლები G_{34} ჯგუფისთვის და მისი გაუხლეჩადი ვერსია G_{35} ჯგუფისთვის

G_{34} და G_{35} ჯგუფები წარმოიდგინება შემდეგნაირად:

$$G_{34} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^4 = \mathbf{b}^4 = \mathbf{c}^2 = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 1, \mathbf{cac} = \mathbf{a}^{-1}, \mathbf{cbc} = \mathbf{b}^{-1} \rangle,$$
$$G_{35} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^4 = \mathbf{b}^4 = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 1, \mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2, \mathbf{cac}^{-1} = \mathbf{a}^{-1}, \mathbf{cbc}^{-1} = \mathbf{b}^{-1} \rangle.$$

ვთქვათ, G არის G_{34} ან G_{35} და დავუშვათ, $H = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \cong C_4 \times C_4$ მაქსიმალური აბელური ქვეჯგუფია G-ში. განვიხილოთ $\lambda, \nu \to BH$ წრფივი კომპლექსური ფიბრაციები წარმოდგენებით:

$$\lambda(\mathbf{a}) = \nu(\mathbf{b}) = i, \;\; \lambda(\mathbf{b}) = \lambda(c) = \nu(\mathbf{a}) = \nu(\mathbf{c}) = 1.$$

G-ს გაფაქტორება ცენტრით $Z \cong C_2^2$ არის იზომორფული C_2^3. G-ს პროექცია C_2^3 ჯგუფის პირველ, მეორე და მესამე თანამამრავლებზე ინდუცირებს წრფივ ფიბრაციებს BG-ზე, რომელთაც ავღნიშნავთ შესაბამისად α, β და γ:

$$\alpha(a) = \beta(b) = \gamma(c) = -1, \;\; \alpha(b) = \alpha(c) = \beta(a) = \beta(c) = \gamma(a) = \gamma(b) = 1.$$

ორივე შემთხვევისთვის ჩერნის კლასები ავღნიშნოთ შემდეგნაირად:

$$x_i = c_i(Ind_H^G(\lambda)); \;\; y_i = c_i(Ind_H^G(\nu));$$

$$a = c_1(\alpha), \;\; b = c_1(\beta), \;\; c = c_1(\gamma).$$

ვთქვათ, $Tr^* : K(s)^*(BH) \to K(s)^*(BG)$ იყოს ტრანსფერის ჰომომორფიზმი [9] რომელიც ასოცირებულია ორმაგ დაფარვასთან $\rho : BH \to BG$ და ვთქვათ,

$$T = Tr^*(uv), \text{ სადაც } u = c_1(\lambda); \;\; v = c_1(\nu).$$

თეორემა 3.1. *ვთქვათ, G არის ერთ-ერთი შემდეგი ჯგუფიდან G_{34}, G_{35}. მაშინ*
i) $K(s)^*(BG) \cong K(s)^*[a, b, c, x_2, y_2, T]/R$, სადაც R იდეალია წარმომქმნელებით:
a^{2^s}, b^{2^s}, c^{2^s},
$c(c + x_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}}), \;\; c(c + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}})$,
$a(a + x_1 + \sum_{i=1}^{s-1} a^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}}), \;\; b(b + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} b^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}})$,
$(c + x_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}})(b + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} b^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}}) + b^{2^s-1}T$,
$(c + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}})(a + x_1 + \sum_{i=1}^{s-1} a^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}}) + a^{2^s-1}T$,
$T^2 + Tx_1y_1 + x_2y_1(c + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}}) + x_1y_2(c + x_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}})$,
$T(a + x_1 + \sum_{i=1}^{s-1} a^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}}) + a^{2^s-1}x_2(c + y_1)$,
$T(b + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} b^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}}) + b^{2^s-1}y_2(c + x_1)$, cT,
$x_2^{2^s} + a^2 + ac$, და

$$y_2^{2^s} = b^2 + bc + \begin{cases} 0 & \text{როცა } G = G_{34} \\ c^2 & \text{როცა } G = G_{35}, \end{cases}$$

სადაც

$$y_1 = (y_2 + y_1 x_2^{2^{s-1}})^{2^{s-1}} + \begin{cases} c & \text{როცა } G = G_{34} \\ 0 & \text{როცა } G = G_{35} \end{cases}$$

და

$$x_1 = c + (x_2 + x_1 x_2^{2^{s-1}})^{2^{s-1}}, \text{ ორივე შემთხვევისთვის.}$$

ii) სხვა თანაფარდობებია:
$a^2c = ac^2, \quad b^2c = bc^2, \quad x_1^{2^s} = b^{2^{s-1}} c^{2^{s-1}}, \quad y_1^{2^s} = a^{2^{s-1}} c^{2^{s-1}}.$

1.6 პარაგრაფიდან ცნობილია, რომ მორავას რგოლის $\chi_s(G)$ რანგი ტოლია

$$\chi_s(G) = \frac{1}{2}16^s - \frac{1}{2}4^s + 8^s.$$

ანუ როცა $s = 2$ რანგი ტოლია 184.

3.1 თეორემაში მოცემული რგოლის რანგის შემოწმება კომპიუტერული ალგებრის პროგრამა სინგულარში, $K(s)^*(BG_{34}), s = 2$.

>$ringR = 2, (a, b, c, y_1, x_1, y_2, x_2, T), (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2), dp;$

>$idealI = (a^4, b^4, c^4, c + x_1 + vx_2{}^2 + v^3x_1{}^2x_2{}^4, y_1 + c + vy_2{}^2 + v^3y_1{}^2y_2{}^4, c(c + x_1 + vc^2x_2), c(c + y_1 + vc^2y_2), a(a + x_1 + va^2x_2), b(b + y_1 + vb^2y_2), v^2y_2{}^4 + b^2 + bc, v^2x_2{}^4 + a^2 + ac, (c + x_1 + vc^2x_2)(b + y_1 + vb^2y_2) + vb^3T, (c + y_1 + vc^2y_2)(a + x_1 + va^2x_2) + va^3T, T^2 + Tx_1y_1 + x_2y_1(c + y_1 + vc^2y_2) + x_1y_2(c + x_1 + vc^2x_2), T(a + x_1 + va^2x_2) + va^3x_2(c + y_1), T(b + y_1 + vb^2y_2) + vb^3y_2(c + x_1), cT);$

> vdim(std(I));

184

3.1 თეორემაში მოცემული რგოლის რანგის შემოწმება პროგრამა სინგულარში, $K(s)^*(BG_{35}), s = 2$

>$ringR = 2, (a, b, c, y_1, x_1, y_2, x_2, T), (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2), dp;$

>$idealI = (a^4, b^4, c^4, c + x_1 + vx_2{}^2 + v^3x_1{}^2x_2{}^4, y_1 + vy_2{}^2 + v^3y_1{}^2y_2{}^4, c(c + x_1 + vc^2x_2), c(c + y_1 + vc^2y_2), a(a + x_1 + va^2x_2), b(b + y_1 + vb^2y_2), v^2y_2{}^4 + b^2 + bc + c^2, v^2x_2{}^4 + a^2 + ac, (c + x_1 + vc^2x_2)(b + y_1 + vb^2y_2) + vb^3T, (c + y_1 + vc^2y_2)(a + x_1 + va^2x_2) + va^3T, T^2 + Tx_1y_1 + x_2y_1(c + y_1 + vc^2y_2) + x_1y_2(c + x_1 + vc^2x_2), T(a + x_1 + va^2x_2) + va^3x_2(c + y_1), T(b + y_1 + vb^2y_2) + vb^3y_2(c + x_1), cT);$

> vdim(std(I));

184

4 თეორემა 2.1-ის დამტკიცება

4.1 თანაფარდობები ფიბრაციებზე

აქ დათვლილია G_{36}, G_{37} ჯგუფების კომპლექსური წარმოდგენების რგოლი. ამ თანაფარდობებით მახასიათებელი კლასების და ტრანსფერის ფორმალური თვისებების გამოყენებით შემდეგ განყოფილებაში მივიღებთ შესაბამის თანაფარდობებს უკვე მორავას თეორიაში.

ვთქვათ $\rho : BH \to BG$ არის ორმაგი დაფარვა $\rho = \rho(H, G)$ და ვთქვათ, ორივე ჯგუფისთვის გვაქვს შემდეგი: $\rho_!\lambda = Ind_H^G(\lambda)$ და $\rho_!\nu = Ind_H^G(\nu)$.

G_{36}, G_{37} ჯგუფებისთვის გვაქვს მსგავსი ხარაქტერების ცხრილები. ერთადერთი განსხვავება ამ ცხრილებში $\rho_!\lambda$ და $\rho_!\nu$-ს დეტერმინანტებშია, ხოლო, ყველა შეზღუდვა და ნამრავლი ერთიდაიგივეა. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი

დებულება 4.1.

$$\begin{aligned} &det(\rho_!\lambda) = \gamma, \;\; det(\rho_!\nu) = \beta, && \text{როცა } G = G_{36}, \\ &det(\rho_!\lambda) = 1, \;\; det(\rho_!\nu) = \beta\gamma, && \text{როცა } G = G_{37}, \end{aligned}$$

და ორივე ჯგუფისთვის სამართლიანია შემდეგი

შეზღუდვები

$$\begin{aligned} i) &\;\; \rho^*\alpha = \lambda^2, \;\; \rho^*\beta = \mu, \;\; \rho^*\gamma = 1; \\ ii) &\;\; \rho^*(\rho_!\lambda) = \lambda + \lambda^3, \;\; \rho^*(\rho_!\nu) = \nu + \nu\mu; \end{aligned}$$

ნამრავლის თანაფარდობები

$$\begin{aligned} iii) &\;\; \alpha\rho_!\lambda = \rho_!\lambda, \;\; \gamma\rho_!\lambda = \rho_!\lambda; \\ iv) &\;\; \beta\rho_!\nu = \rho_!\nu, \;\; \gamma\rho_!\nu = \rho_!\nu; \\ v) &\;\; (\rho_!\nu)^2 = 1 + \beta + \gamma + \beta\gamma; \\ vi) &\;\; (\rho_!\lambda)^2 = 1 + \alpha + \gamma + \alpha\gamma. \end{aligned}$$

დამტკიცება. დეტერმინანტები:

G_{36}-სთვის განვიხილოთ $H = \langle b, c, a^2 \rangle$ ქვეჯგუფი და გამოვთვალოთ $\lambda_!$ -ს დეტერმინანტი:

$$a(V_1 + aV_2) = aV_1 + a^2V_2 = a^2V_2 + aV_1, \;\; \lambda(a^2) = 1,$$

ანუ $\lambda_!(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$b(V_1 + aV_2) = bV_1 + baV_2, \;\; ba = ab^{-1}, \;\; \lambda(b) = i,$$

ანუ $\lambda_!(b) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

$$c(V_1 + aV_2) = cV_1 + caV2 = aV_1 + aa^2cV_2, \;\; ca = a^{-1}c^{-1} = a^3c, \;\; \lambda(c) = \lambda(a^2) = 1,$$

ანუ $\lambda_!(c) = E$.
ამრიგად, $det(\rho_!\lambda) = \gamma$.

ახლა G_{37} ჯგუფისთვის გამოვთვალოთ $\lambda_!$-ს დეტერმინანტი. გავიხსენოთ $H = \langle b, c, d \rangle$. შევნიშნოთ, რომ $a \in G/H$ და $a^2 = b^2$.

$$a(V_1 + aV_2) = aV_1 + a^2V_2 = aV_1 + b^2V_2, \;\; \lambda(b^2) = -1,$$

ანუ $\lambda_!(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$b(V_1 + aV_2) = bV_1 + baV_2 = bV_1 + ab^3V_2,$$

რადგან

$$ba = a^{-1}b = aa^2b = ab^2b = ab^3,\ \lambda(b) = i,\ \lambda(b^3) = -i.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\lambda_!(b) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

$$c(V_1 + aV_2) = cV_1 + caV_2 = cV_1 + a(cb^2db^2)V_2,$$

რადგან,

$$ca = acb^2db^2d = d^{-1},\ aca^{-1}c = caca^{-1},\ ca = aca^{-1}cac = ac(a^{-1}cac)$$

$$ac(a^2aca^{-1}a^2c) = ac(b^2aca^{-1}b^2c) = ac(b^2aca^(-1)cb^2) = acb^2db^2.$$

$$\lambda(c) = 1,\ \lambda(b^2) = -1,\ \lambda(d) = 1,$$

ანუ $\lambda_!(c) = E$.

$$d(v_1 + aV_2) = dV_1 + daV_2 = dV_1 + ad^{-1}V_2,$$

რადგან

$$da = ad^{-1},\ d = aca^{-1}c \to ca^{-1}ca = d^{-1}.$$

ამრიგად, $det(\rho_!\lambda) = 1$.

გამოვთვალოთ G_{36} ჯგუფისთვის $\nu_!$ -ს დეტერმინანტი.

$$a(V_1 + aV_2) = aV_1 + a^2V_2,\ \nu(a^2) = -1,$$

ანუ, $\nu_!(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$b(V_1 + aV_2) = bV_1 + baV_2,\ ba = ab^{-1},\ \nu(b) = 1,$$

ესეიგი $\nu_!(b) = E$,

$$c(V_1 + aV_2) = cV_1 + caV2 = cV_1 + aa^2cV_2,\ \nu(c) = 1,\ \nu(a^2) = -1,$$

ანუ $\nu_!(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ამრიგად, დამტკიცდა, რომ $det(\rho_!\nu) = \beta$ რადგან მისი სიდიდე არის -1-ის ტოლი c-ზე და 1-ის ტოლი a და b-ზე.

ახლა გამოვთვალოთ G_{37} ჯგუფისთვის $\nu_!$ დერმინანტი.

$$a(V_1 + aV_2) = aV_1 + a^2V_2 = aV_1 + b^2V_2,\ \nu(b^2) = 1,$$

ამიტომ $\nu_!(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$b(V_1 + aV_2) = bV_1 + baV_2 = bV_1 + ab^3V_2,$$

რადგან

$$ba = a^{-1}b = aa^2b = ab^2b = ab^3,\ \nu(b) = 1,$$

ამიტომ $\nu_!(b) = E$;

$$c(V_1 + aV_2) = cV_1 + caV_2 = cV_1 + a(cb^2db^2)V_2,$$

რადგან,

$$\nu(c) = \nu(b^2) = 1,\ \nu(d) = -1,$$

მივიღებთ, რომ $\nu_!(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ანუ $det(\rho_!\nu) = \beta\gamma$.

შეზღუდვები:

i) $\rho^*\alpha = \lambda^2$, $\rho^*\beta = \mu$, $\rho^*\gamma = 1$;

ii) $\rho^*\lambda_! = \lambda + \lambda^3$, $\rho^*\nu_! = \nu + \nu\mu$.
$a^*(\lambda)(b) = \lambda(a^*(b)) = \lambda(aba^{-1}) = \lambda(b^{-1}) = -i$;
$a^*(\lambda(c)) = \lambda(a^*c) = \lambda(aca^{-1}) = \lambda(dc) = 1$;
$a^*(\lambda)(d) = \lambda^*(ada^{-1}) = \lambda(a^2d^{-1}a^{-2}) = (-1)\cdot 1 \cdot (-1) = 1$.
$a^*(\nu)(b) = \nu(aba^{-1}) = \nu(b^{-1}) = 1$;
$a^*(\nu)(c) = \nu(aca^{-1}) = \nu(dc) = -1$,
$a^*(\nu)(d) = \nu(ada^{-1}) = \nu(a^2d^{-1}a^{-2}) = -1$.

ნამრავლის თანაფარდობები:

iii) $\alpha\lambda_! = \lambda_!$, $\gamma\lambda_! = \lambda_!$;
$\alpha\lambda_! = (\lambda^2\lambda)_! = (\lambda^3)_! = \lambda_!$.
$\gamma\lambda_! = (1\lambda)_! = \lambda_!$.

iv) $\beta\nu_! = \nu_!$, $\gamma\nu_! = \nu_!$; $\beta\nu_! = (\mu\nu)_! = (\mu\nu)_!$
როგორც ტრანსფერი არის მუდმივი ორბიტრალურ ელემენტზე.

v) $(\lambda_!)^2 = 1 + \alpha + \gamma + \alpha\gamma$.
$(\lambda_!)^2 = (\lambda(\lambda + \lambda^3))_! = (\lambda^2 + 1)_! = (1+\gamma)\alpha + 1 + \gamma = 1 + \alpha + \gamma + \alpha\gamma$,
რადგან $\lambda^4 = 1, \rho^*\alpha = \lambda^2$, და $1_! = 1 + \gamma$.

vi) $(\nu_!)^2 = 1 + \beta + \gamma + \beta\gamma$.
$(\nu_!)^2 = (\nu(\nu + \nu\mu))_! = \nu^2 + \nu^2\mu = 1_! + \mu_! = 1 + \gamma + (1+\gamma)\beta = 1 + \beta + \gamma + \beta\gamma$,
რადგან $\nu^2 = 1$ და $1_! = 1 + \gamma$.

□

iii)-ის პირველი თანაფარდობა მიანიშნებს, რომ $\rho_!\lambda$ უნდა იყოს α-ს შესაბამისი 2-დაფარვის ტოტალურ სივრცეზე წრფივი ფიბრაციის ტრანსფერი. სახელდობრ, გვაქვს:

ლემა 4.2. *ვთქვათ, $G = G_{36}$. მაშინ არსებობს ქვეჯგუფი $H' \subset G_{36}$ და წრფივი ფიბრაცია $\lambda' \to BH'$ ისეთი, რომ $Ind_H^G(\lambda) = Ind_{H'}^G(\lambda')$ α გადადის ტრივიალურ ფიბრაციაში BH' - სივრცეზე.*

დამტკიცება. დავუშვათ H იყოს შემდეგი სახით განსაზღვრული: $H' = \langle \mathbf{b}^2, \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle$, ხოლო λ' ფიბრი აკმაყოფილებდეს პირობებს:

$$\lambda'(\mathbf{a}) = 1, \lambda'(\mathbf{b}^2) = -1, \lambda'(\mathbf{c}) = 1.$$

განვიხილოთ შემდეგი ტოლობები

$$a(V_1 + b^{-1}V_2) = aV_1 + ab^{-1}V_2 = aV_1 + baV_2 = aV_1 + b^{-1}b^2aV_2,$$

რადგან

$$ab^{-1} = ba, \ \lambda'(a) = 1, \ \lambda'(b^2a) = -1,$$

ამიტომ $\lambda'_!(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

როგორც ვიცით, $\lambda_!(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, რაც $\lambda'_!(a)$-ის ექვივალენტური მატრიცია.

$$b(V_1 + b^{-1}V_2) = bV_1 + V_2 = V_2 + b^{-1}b^2V_1, \ \lambda'(b^2) = -1,$$

ამიტომ $\lambda'_!(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

რადგან, $\lambda_!(b) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ მივიღეთ ექვივალენტური მატრიცი.

$$c(V_1 + b^{-1}V_2) = cV_1 + cbV_2 = cV_1 + bcV_2$$

რადგან $\lambda(c) = 1$, ამიტომ $\lambda'_!(c) = E$. გავიხსენოთ, რომ $\lambda_!(c) = E$.

□

ჩვენ ასევე დაგვჭირდება ერთი ფაქტიც, რომელსაც ლემის სახით ჩამოვაყალიბებთ:

ლემა 4.3. *ვთქვათ, $G = G_{36}$. მაშინ არსებობს ქვეჯგუფი $K' \subset G$ და წრფივი ფიბრაცია $\nu' \to BK'$ ისეთი, რომ $Ind_H^G(\nu) = Ind_{K'}^G(\nu')$. β გადადის ტრივიალურ ფიბრაციაში BK'-სივრცეზე.*

დამტკიცება. დავუშვათ, K' იყოს შემდეგი სახით განსაზღვრული: $K' = \langle b, a \rangle$, ხოლო ν' ფიბრი აკმაყოფილებდეს პირობებს: $\nu'(b) = 1$, $\nu'(a) = i$.

განვიხილოთ შემდეგი ტოლობები

$$a(V_1 + cV_2) = aV_1 + acV_2 = aV_1 + ca^3V_2,$$

რადგან, $\nu'(a^3) = -i$,

ამიტომ $\nu'_!(a) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

როგორც ვიცით $\nu_!(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, რომელიც $\nu'_!(a)$-ს მატრიცის ექვივალენტურია.

$$b(V_1 + cV_2) = bV_1 + bcV_2 = bV_1 + cbV_2,$$

რადგან $\nu'(b) = 1$, ამიტომ $\nu'_!(b) = E$. გავიხსენოთ $\nu_!(b) = E$, რომელიც $\nu'_!(b)$-ს ექვივალენტური მატრიცია.

$$c(V_1 + cV_2) = cV_1 + V_2,$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\nu'_!(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

გავიხსენოთ $\nu_!(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, რომელიც $\nu'_!(c)$-ს ექვივალენტური მატრიცაა.

$\square$

ლემა 4.4. *ვთქვათ, $G = G_{37}$. მაშინ არსებობს ქვეჯგუფი $H'' \subset G_{37}$ და წრფივი ფიბრაცია $\lambda'' \to BH''$ ისეთი, რომ $Ind_H^G(\lambda) = Ind_{H''}^G(\lambda'')$. ფიბრაცია $\alpha\gamma$ გადადის ტრივიალურ ფიბრაციაში BH'' - სივრცეზე.*

დამტკიცება. დავუშვათ, H'' იყოს შემდეგი სახით განსაზღვრული: $H'' = \langle \mathbf{b}^2, \mathbf{c}, \mathbf{ab} \rangle$ და λ'' ფიბრი აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\lambda''(\mathbf{ab}) = i, \lambda''(\mathbf{b^2}) = -1, \lambda''(\mathbf{c}) = 1.$$

განვიხილოთ შემდეგი ტოლობები

$$a(V_1 + aV_2) = aV_1 + a^2V_2,$$

რადგან $\lambda''(a^2) = -1$, მაშინ $\lambda''_!(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

გავიხსენოთ, რომ $\lambda_!(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, რაც $\lambda''_!(a)$ მატრიცის ტოლია.

$$b(V_1 + aV_2) = bV_1 + baV_2 = a(ab)^{-1}V_1 + a^2(ab)V_2,$$

რადგან $\lambda''(ab) = i$ და

$$b = a^{-1}ba^{-1} = aa^2ba^{-1}$$

და ასევე

$$a^2 = b^2 = ab^{-1}a^{-1} = a(ab)^{-1},\ ba = a^{-1}b = a^2(ab).$$

ამიტომ $\lambda''_!(b) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

როგორც უკვე ვიცით $\lambda_!(b) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, რაც $\lambda''_!(b)$-ს ექვივალენტური მატრიცაა.

$$c(V_1 + bV_2) = cV_1 + cbV_2 = cV_1 + bcV_1,\ bc = cb,$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\lambda''(c) = 1$ მაშინ $\lambda''_!(c) = E$.
გავიხსენოთ, რომ $\lambda_!(c) = E$.

$\square$

ლემა 4.5. *ვთქვათ, $G = G_{37}$. მაშინ არსებობს ქვეჯგუფი $K'' \subset G$ და წრფივი ფიბრაცია $\nu'' \to BK''$ ისეთი, რომ $Ind_H^G(\nu) = Ind_{K''}^G(\nu'')$. β გადადის ტრივიალურ ფიბრაციაში BK''-სივრცეზე.*

დამტკიცება. დავუშვათ, $K^{''}$ იყოს შემდეგი სახით განსაზღვრული: $K^{''} = \langle \mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{a} \rangle$ ხოლო $\nu^{''}$ ფიბრი აკმაყოფილებდეს პირობებს:

$$\nu^{''}(\mathbf{a}) = \nu^{''}(\mathbf{b}) = 1,\ \nu^{''}(\mathbf{d}) = -1.$$

განვიხილოთ შემდეგი ტოლობები:

$$a^{-1}(V_1 + cV_2) = a^{-1}V_1 + a^{-1}cV_2 = a^{-1}V_1 + cdV_2$$

რადგან

$$\nu''(a) = 1,\ \nu''(b) = 1,\ \nu''(d) = -1,$$

ამიტომ

$\nu_!''(a^{-1}) = \nu_!''a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

ავღნიშნოთ, რომ $\nu_!(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ არის $\nu_!''(a)$ ექვივალენტური მატრიცი.

$$b(V_1 + cV_2) = bV_1 + bcV_2 = bV_1 + cbV_2,$$

და $\nu_!''(b) = E$ გავიხსენოთ, რომ $\nu_!(b) = E$ ასევე.

$$c(V_1 + cV_2) = V_2 + cV_1;$$

და $\nu''(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

გავიხსენოთ, რომ $\nu_!(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ რაც $\nu''(c)$-ს ექვივალენტური მატრიცია.

$\square$

4.2 თეორემა 2.1-ის თანაფარდობების დამტკიცება

შემდეგი ტოლობები:

$$a^{2^s} = b^{2^s} = c^{2^s} = 0.$$

გამომდინარეობს $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1$ *განსაზღვრებებიდან.*

მე-4 და მე-5 თანაფარდობები გამომდინარეობს შესაბამისად პარაგრაფი 1.6-ის (2) და (3) ფორმულებიდან.

G_{36} *ჯგუფის შემთხვევაში მე-6 თანაფარდობისთვის*

$$a(a + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} a^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}}) = 0$$

განვიხილოთ ორმაგი დაფარვა $\rho : BH' \to BG$ *და გამოვიყენოთ პარაგრაფი 1.6-ის ფორმულა (1) და პარაგრაფი 4.1-ის ლემა 4.2. საიდანაც გამომდინარეობს, რომ თანაფარდობის მეორე თანამამრავლი არის* $c_1(\lambda')$*-ის ტრანსფერი, ანუ,*

$$Tr'^{*}(c_1(\lambda')) = (a + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} a^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}}).$$

მაშასადამე

$$aTr'^{*}(c_1(\lambda')) = Tr'^{*}(\rho^*(a)c_1(\lambda')) = Tr'^{*}(0 \cdot c_1(\lambda')) = 0.$$

ანალოგიურად , G_{37} *ჯგუფისთვის გამოყენებულია (1) ფორმულა და 4.4 ლემა.*

ზემოაღნიშნულის მსგავსად თუ გამოვიყენებთ (1) ფორმულას და ლემებს 4.3 და 4.5 მივიღებთ მე- 7 თანაფარდობას.

$$b(b + x_1 + \sum_{i=1}^{s-1} b^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}}) = 0.$$

ახლა კი შევნიშნოთ, რომ მე-4 და მე-6 თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს $a^2c = ac^2$*, რაც არის თეორემა 2.1-ის ii)-ის პირველი თანაფარდობა. მართლაც, მე-4 თანაფარდობის* a*-ზე გადამრავლებით და მე- 6 თანაფარდობის* c*-ზე გადამრავლებით, ამ გამოსახულებების ჯამი ტოლი იქნება* $0 = a^2c + ac^2$*-ის.*

ანალოგიურად, მე-5 და მე-7 თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს $b^2c = bc^2$*-ს, რომლიც არის თეორემა 2.1-ის ii)-ის მეორე გამოსახულება. შევნიშნოთ ასევე, რომ*

$$a^ic^j = 0, \ \ b^ic^j = 0, \ \ i + j > 2^s. \tag{7}$$

პირველი მათგანი შედეგია $a^2c = ac^2$ *და* $a^{2^s} = c^{2^s} = 0$ *თვისების. ანალოგიურად მეორე გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობებიდან:* $b^2c = bc^2$ *და* $b^{2^s} = c^{2^s} = 0.$

თეორემა 2.1 ii) -ში მოყვანილ $x_2^{2^s}$*,* $y_2^{2^s}$*,* $x_1^{2^s}$ *და* $y_1^{2^s}$ *ერთწევრების გაშლის ფორმულებისთვის ჩვენ გვჭირდება პარაგრაფი 4.1-ის შედეგები. კერძოდ, ჩვენ უნდა გამოვიყენოთ ლემა 1.2 ყველა ინდუცირებული თანაფარდობისთვის, რომელიც მოცემულია პარაგრაფი 4.1-ში და ავიღოთ მათი დეტერმინანტები, რომელიც შეიძლება ჩაიწეროს* α, β, γ *ფიბრაციების ტერმინებში.*

მაგალითისთვის ავიღოთ ჯგუფი $G = G_{36}$*. შესაბამისი თანაფარდობები*

$$x_2^{2^s} = c^2 + bc, \ \ x_1^{2^s} = b^{2^{s-1}} c^{2^{s-1}}$$

და

$$y_2^{2^s}=a^2+ac,\;\; y_1^{2^s}=a^{2^{s-1}}c^{2^{s-1}}$$

არიან ნამრავლის თანაფარდობების v) და vi) შედეგები. დასაწყისისთვის დავამტკიცოთ პირველი ორი თანაფარდობა. გავუტოლოთ v) თანაფარდობაში ჩერნის კლასები ერთმანეთს. შემდეგ გამოვიყენოთ (7)ფორმულა და პირველი ჩერნის კლასებისთვის გვექნება

$$x_1^{2^s}=b+c+b+c+b^{2^{s-1}}c^{2^{s-1}}=a^{2^{s-1}}c^{2^{s-1}}.$$

ანალოგიურად ჩერნის მეორე კლასების გატოლებით და (7) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ $x_2^{2^s}$-ის გაშლას.

$$\begin{aligned}x_2^{2^s}&=c_2(\rho_!\nu^2)+c_1(det\,\rho_!\nu)^2\\&=c_2(1+\beta+\gamma+\beta\gamma)+c_1(\beta)^2=bc+bF(b,c)+cF(b,c)+b^2\\&=bc+c^2.\end{aligned}$$

ანალოგიურად, თუ გავითვალისწინებთ ტოლობებს

$$det(\rho_!\lambda)=\beta;\;\; a=c_1(\alpha\gamma);\, c=c_1(\gamma),$$

vi) ნამრავლის თანაფარდობაში პირველი ჩერნის კლასების გატოლებით მივიღებთ

$$v_s y_1^{2^s}=c_1(\alpha+\gamma+\alpha\gamma)=v_s a^{2^{s-1}}c^{2^{s-1}}.$$

ხოლო მეორე ჩერნის კლასების გატოლებით მივიღებთ

$$v_s^2y_2^{2^s}+c^2=ac+aF(a,c)+cF(a,c)=a^2+ac+c^2$$

ანუ

$$v_s^2y_2^{2^s}=a^2+ac.$$

დავამტკიცოთ G_{37} ჯგუფისთვის შემდეგი ტოლობები $x_1^{2^s}=b^{2^{s-1}}c^{2^{s-1}}; v_s^2x_2^{2^s}=bc$.
v) ნამრავლის თანაფარდობიდან ვიცით, რომ

$$(\nu_!)^2=1+\beta\gamma+\beta\gamma.$$

გავუტოლოთ ჩერნის პირველი კლასები და გავითვალისწინოთ ტოლობები

$$det(\rho_!\nu)=\beta\gamma, c_i(\nu_!)=x_i, c_(\beta)=b, c_1(\gamma)=c.$$

მივიღებთ, რომ

$$v_sc_1^{2^s}=b+c+b+c+v_sb^{2^{s-1}}c^{2^{s-1}}.$$

ჩერნის მეორე კლასების გატოლებისას მივიღებთ

$$v_s^2x_2^{2^s}+F(b,c)^2=bc+bF(b,c)+cF(b,c),$$

ანუ

$$v_s^2x_2^{2^s}+b^2+c^2=b^2+c^2+bc,$$

და საბოლოოდ

$$v_s^2 x_2^{2^s} = bc.$$

დავამტკიცოთ G_{37} ჯგუფისთვის შემდეგი ტოლობები

$$y_1^{2^s} = a^{2^{s-1}} c^{2^{s-1}}; \;\; v_s^2 y_2^{2^s} = a^2 + ac + c^2.$$

ეს ფორმულები მიიღება $(\lambda_!)^2 = 1+\alpha+\gamma+\alpha\gamma$-ში შესაბამისად პირველი და მეორე ჩერნის კლასების გატოლებით და $det(\rho_! \lambda) = 1, c_i(\lambda_!) = y_i$, $a = c_1(\alpha\gamma), F(a,c) = c_1(\alpha)$ ტოლობების გათვალისწინებით.

მე-8 და მე-9 თანაფარდობები.

$$(c + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s - 2^i} y_2^{2^{i-1}})(b + x_1 + \sum_{i=1}^{s-1} b^{2^s - 2^i} x_2^{2^{i-1}}) = Tb^{2^s - 1}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $G = G_{36}$. განვიხილოთ შემდეგი დიაგრამა

$$\begin{tikzcd} B\langle \mathbf{b}, \mathbf{a}^2 \rangle \arrow[r] \arrow[d, "\rho_\mu"] & B\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle \arrow[d, "\rho_\beta"] \\ B\langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}^2 \rangle \arrow[r, "\rho_\gamma"'] & BG \end{tikzcd} \quad (8)$$

და შევნიშნოთ, რომ თანაფარდობის მარცხენა მხარე ტოლია

$$\begin{aligned}
& Tr_\gamma^*(v)(b + x_1 + \sum_{i=1}^{s-1} b^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}}) && \text{(1) ტრანსფერის ფორმულის თანახმად} \\
&= Tr_\gamma^*(v) Tr_\beta^*(c_1(\nu')) && \text{4.3 ლემის თანახმად} \\
&= Tr_\gamma^*(v \cdot \rho_\gamma^* Tr_\beta^*(c_1(\nu'))) && \text{ფრობენიუსის ფორმულით} \\
&= Tr_\gamma^*(v \cdot Tr_\mu^*(\rho_\mu^*(u))) && \text{ორმაგი კოსეტების ფორმ. და 4.3ლემით} \\
&= Tr_\gamma^*(Tr_\mu^*(\rho_\mu^*(uv))) && \text{ფრობენიუსის ფორმულით} \\
&= Tr_\gamma^*(uv \cdot Tr_\mu^*(1)) = Tr_\gamma^*(uv \cdot c_1^{2^s-1}(\mu)) && Tr^*(1) \text{ ფორმულით} \\
&= Tb^{2^s-1}. && \beta,\ \mu, \text{ და } T\text{-ს განსაზღვრებიდან}
\end{aligned}$$

□

ანალოგიურად დავამტკიცოთ

$$(c + x_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s - 2^i} x_2^{2^{i-1}})(a + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} a^{2^s - 2^i} y_2^{2^{i-1}}) = Ta^{2^s - 1}.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ შემდეგი დიაგრამა

$$\begin{tikzcd} B\langle \mathbf{b}^2, \mathbf{c}, \mathbf{a}^2\rangle \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{\lambda^2}"] & B\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}^2, \mathbf{c}\rangle \arrow[d, "\rho_\alpha"] \\ B\langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}^2\rangle \arrow[r, "\rho_\gamma"'] & BG \end{tikzcd} \tag{9}$$

ამ აღნიშვნებით თანაფარდობის მარცხენა მხარე გაუტოლდება შემდეგს

$$\begin{aligned}
&Tr^*_\gamma(u)Tr^*_\alpha(c_1(\lambda')) && \text{4.2 ლემის და (1) ფორმულის თანახმად}\\
&= Tr^*_\gamma(u \cdot \rho^*_\gamma Tr^*_\alpha(c_1(\lambda'))) && \text{ფრობენიუსის ფორმულით}\\
&= Tr^*_\gamma(u \cdot Tr^*_{\lambda^2}(\rho^*_{\lambda^2}(v))) && \text{ორმაგი კოსეტების ფორმ. და 4.2 ლემით}\\
&= Tr^*_\gamma(Tr^*_{\lambda^2}(\rho^*_{\lambda^2}(uv))) && \text{ფრობენიუსის ფორმულით}\\
&= Tr^*_\gamma(uv \cdot Tr^*_{\lambda^2}(1)) = Tr^*_\gamma(uv \cdot c_1^{2^s-1}(\lambda^2)) && Tr^*(1) \text{ ფორმულით}\\
&= Ta^{2^s-1} && \alpha,\ \lambda,\ \text{და } T\text{-ს განსაზღვრების თანახმად.}
\end{aligned}$$

□

$G = G_{37}$ ჯგუფისთვის დამტკიცება ანალოგიურია, ოღონდ უნდა გამოვიყენოთ 4.5ლემა და 4.4ლემა.

დავამტკიცოთ G_{37} ჯგუფისთვის მე-8 თანაფარდობა.

განვიხოლოთ შემდეგი დიაგრამა

$$\begin{tikzcd} B\langle \mathbf{b}, \mathbf{d}\rangle \arrow[r] \arrow[d, "\rho_\mu"] & B\langle \mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{a}\rangle \arrow[d, "\rho_\beta"] \\ B\langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle \arrow[r, "\rho_\gamma"'] & BG \end{tikzcd} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&Tr^*_\gamma(v)Tr^*_\beta(c_1(\nu'))\\
&= Tr^*_\gamma(v)Tr^*_\beta(c_1(\nu')) && \textit{4.3 ლემის თანახმად}\\
&= Tr^*_\gamma(v \cdot \rho^*_\gamma Tr^*_\beta(c_1(\nu'))) && \textit{ფრობენიუსის ფორმულით}\\
&= Tr^*_\gamma(v \cdot Tr^*_\mu(\rho^*_\mu(u))) && \textit{ორმაგი კოსეტების ფორმ. და 4.3ლემით}\\
&= Tr^*_\gamma(Tr^*_\mu(\rho^*_\mu(uv))) && \textit{ფრობენიუსის ფორმულით}\\
&= Tr^*_\gamma(uv \cdot Tr^*_\mu(1)) = Tr^*_\gamma(uv \cdot v_s c_1^{2^s-1}(\mu)) && Tr^*(1)\textit{-ის ფორმულით}\\
&= v_s T b^{2^s-1}.
\end{aligned}$$

დავამტკიცოთ G_{37} ჯგუფისთვის მე-9 თანაფარდობა.

შემდეგი დიაგრამიდან

$$\begin{tikzcd} B\langle \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{\lambda^2}"] & B\langle \mathbf{ab}, \mathbf{a}^2, \mathbf{c}\rangle \arrow[d, "\rho_{\alpha\gamma}"] \\ B\langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle \arrow[r, "\rho_\gamma"'] & BG \end{tikzcd} \tag{11}$$

გვაქვს

$$
\begin{aligned}
&Tr^*_\gamma(u)Tr^*_{\alpha\gamma}(c_1(\lambda')) && \text{4.2ლემის და (1) ფორმულის თანახმად}\\
&= Tr^*_\gamma(u\cdot\rho^*_\gamma Tr^*_{\alpha\gamma}(c_1(\lambda'))) && \text{ფრობენიუსის ფორმულით}\\
&= Tr^*_\gamma(u\cdot Tr^*_{\lambda^2}(\rho^*_{\lambda^2}(v))) && \text{ორმაგი კოსეტების ფორმ. და 4.2 ლემით}\\
&= Tr^*_\gamma(Tr^*_{\lambda^2}(\rho^*_{\lambda^2}(uv))) && \text{ფრობენიუსის ფორმულით}\\
&= Tr^*_\gamma(uv\cdot Tr^*_{\lambda^2}(1)) = Tr^*_\gamma(uv\cdot v_s c_1^{2^s-1}(\lambda^2)) && Tr^*(1)\ \text{ფორმულის თანახმად}\\
&= v_s T a^{2^s-1} && \alpha,\ \lambda,\ \text{და } T\text{-ს განსაზღვრების თანახმად.}
\end{aligned}
$$

იგივე არგუმენტები გამოიყენება მე-11 და მე-12 თანაფარდობებისთვის და შეიძლება ერთდროულად დამტკიცდეს G_{36} და G_{37} ჯგუფებისთვის. ორივე შემთხვევაში მივიღებთ შემდეგს

$$T(a+y_1+\sum_{i=1}^{s-1}a^{2^s-2^i}y_2^{2^{i-1}}) = a^{2^s-1}Tr^*(uv^2)$$

ან

$$T(b+x_1+\sum_{i=1}^{s-1}b^{2^s-2^i}x_2^{2^{i-1}}) = b^{2^s-1}Tr^*(u^2v).$$

ამისთვის ჩვენ დაგვჭირდება, ის ფაქტი, რომ $t\in C_2 = G/H$ ინვოლუციისთვის ადგილი აქვს ფრობენიუსის შექცევადობას

i) $Tr^*(u^2v) = Tr^*(uv(u+tu)-vutu)) = Tr^*(uv)x_1 - Tr^*(v)x_2$,
ii) $Tr^*(uv^2) = Tr^*(uv(v+tv)-uvtv)) = Tr^*(uv)y_1 - Tr^*(u)y_2$.

მოვიყვანოთ დეტალური მსჯელობა $G = G_{37}$ ჯგუფისთვის. გამოვიყენოთ შემდეგი დიაგრამა და დავამტკიცოთ მე-11 თანაფარდობა.

$$
\begin{tikzcd}
B\langle\mathbf{b},\mathbf{d}\rangle \arrow[r] \arrow[d, "\rho_\mu"] & B\langle\mathbf{b},\mathbf{d},\mathbf{a}\rangle \arrow[d, "\rho_\beta"] \\
B\langle\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle \arrow[r, "\rho_\gamma"'] & BG
\end{tikzcd}
\qquad (12)
$$

ზემოთ მოყვანილი i) ტოლობა მოგვცემს შემდეგ გამოსახულებას

$$T(b+x_1+\sum_{i=1}^{s-1}b^{2^s-2^i}x_2^{2^{i-1}}) + b^{2^s-1}Tx_1 + b^{2^s-1}x_2(c+y_1+\sum_{i=1}^{s-1}c^{2^s-2^i}y_2^{2^{i-1}}) = 0.$$

მაშინ მეორე შესაკრები ნულის ტოლია მე-6 თანაფარდობიდან და (7) ტოლობიდან. მესამე შესაკრები ტოლია $b^{2^s-1}x_2(c+y_1)$, (7) ტოლობით. რაც გვაძლევს მე-11 თანაფარდობას.

უფრო დეტალურად,

$$
\begin{aligned}
&= Tr^*_\gamma(uv)Tr^*_\beta(c_1(\nu')) && \text{4.3 ლემის თანახმად}\\
&= Tr^*_\gamma(uv\cdot \rho^*_\gamma Tr^*_\beta(c_1(\nu'))) && \text{ფრობენიუსის ფორმულით}\\
&= Tr^*_\gamma(uv\cdot Tr^*_\mu(\rho^*_\mu(u))) && \text{ორმაგი კოსეტების ფორმ. და 4.3ლემით}\\
&= Tr^*_\gamma(Tr^*_\mu(\rho^*_\mu(u^2v))) && \text{ფრობენიუსის ფორმულით}\\
&= Tr^*_\gamma(u^2v\cdot Tr^*_\mu(1)) = Tr^*_\gamma(u^2v\cdot v_s c_1^{2^s-1}(\mu)) && Tr^*(1) \text{ ფორმულის თანახმად}\\
&= v_sT(u^2v)b^{2^s-1}.
\end{aligned}
$$

ანალოგიურად, გამოვიყენოთ შემდეგი დიაგრამა

$$
\begin{tikzcd}
B\langle \mathbf{b},\mathbf{c}\rangle \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{\lambda^2}"] & B\langle \mathbf{ab},\mathbf{a}^2,\mathbf{c}\rangle \arrow[d, "\rho_{\alpha\gamma}"]\\
B\langle \mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle \arrow[r, "\rho_\gamma"'] & BG
\end{tikzcd}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
&Tr^*_\gamma(uv)Tr^*_{\alpha\gamma}(c_1(\lambda')) && \text{4.2 ლემის და (1)ფორმულის თანახმად}\\
&= Tr^*_\gamma(uv\cdot \rho^*_\gamma Tr^*_{\alpha\gamma}(c_1(\lambda'))) && \text{ფრობენიუსის ფორმულით}\\
&= Tr^*_\gamma(uv\cdot Tr^*_{\lambda^2}(\rho^*_{\lambda^2}(v))) && \text{ორმაგი კოსეტების ფორმ. და 4.2 ლემით}\\
&= Tr^*_\gamma(Tr^*_{\lambda^2}(\rho^*_{\lambda^2}(uv^2))) && \text{ფრობენიუსის ფორმულით}\\
&= Tr^*_\gamma(uv^2\cdot Tr^*_{\lambda^2}(1)) = Tr^*_\gamma(uv\cdot v_s c_1^{2^s-1}(\lambda^2)) && Tr^*(1) \text{ ფორმულის თანახმად}\\
&= v_sT(uv^2)a^{2^s-1} && \alpha,\ \lambda, \text{ და } T\text{-ს განსაზღვრების თანახმად.}
\end{aligned}
$$

ზემოთ მოყვანილი ii) ტოლობით გვაქვს

$$
T(a+y_1+\sum_{i=1}^{s-1} a^{2^s-2^i}y_2^{2^{i-1}})+a^{2^s-1}Ty_1+a^{2^s-1}y_2(c+x_1+\sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i}x_2^{2^{i-1}})=0.
$$

მეორე შესაკრები ნულია მე- 7 თანაფარდობით და (7) ტოლობით. მესამე შესაკრები ტოლია $a^{2^s-1}y_2(c+x_1)$. ამრიგად, მივიღებთ მე-12 თანაფარდობას.

□

მე-11 თანაფარდობა G_{36} ჯგუფისთვის.

დამტკიცება. განვიხილოთ დიაგრამა

$$
\begin{tikzcd}
B\langle \mathbf{b},\mathbf{a}^2\rangle \arrow[r] \arrow[d, "\rho_\mu"] & B\langle \mathbf{b},\mathbf{a}\rangle \arrow[d, "\rho_\beta"]\\
B\langle \mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}^2\rangle \arrow[r, "\rho_\gamma"'] & BG
\end{tikzcd}
\tag{14}
$$

გვაქვს

$$
\begin{aligned}
&Tr^*_\gamma(uv)(b + x_1 + v_s \sum_{i=1}^{s-1} b^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}}) && \text{(1)ტრანსფერის ფორმულის თანახმად}\\
&= Tr^*_\gamma(uv)Tr^*_\beta(c_1(\nu')) && \text{4.3 ლემის თანახმად}\\
&= Tr^*_\gamma(uv\cdot\rho^*_\gamma Tr^*_\beta(c_1(\nu'))) && \text{ფრობენიუსის ფორმულით}\\
&= Tr^*_\gamma(uv\cdot Tr^*_\mu(\rho^*_\mu(u))) && \text{ორმაგი კოსეტების ფორმ. და 4.3 ლემით}\\
&= Tr^*_\gamma(Tr^*_\mu(\rho^*_\mu(u^2v))) && \text{ფრობენიუსის ფორმულით}\\
&= Tr^*_\gamma(u^2v\cdot Tr^*_\mu(1)) = Tr^*_\gamma(u^2v\cdot v_s c_1^{2^s-1}(\mu)) && Tr^*(1) \text{ ფორმულის თანახმად}\\
&= v_sT(u^2v)b^{2^s-1}. && \beta,\ \mu,\ \text{და } T\text{-ს განსაზღვრების თანახმად}
\end{aligned}
$$

$\square$

დავამტკიცოთ მე-12 თანაფარდობა G_{36} ჯგუფისთვის.
განვიხილოთ დიაგრამა:

$$
\begin{tikzcd}
B\langle \mathbf{b}^2, \mathbf{c}, \mathbf{a}^2\rangle \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{\lambda 2}"] & B\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}^2, \mathbf{c}\rangle \arrow[d, "\rho_\alpha"] \\
B\langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}^2\rangle \arrow[r, "\rho_\gamma"'] & BG
\end{tikzcd}
\tag{15}
$$

ამ აღნიშვნებით თანაფარდობის მარცხენა მხარე გაუტოლდება შემდეგს

$$
\begin{aligned}
&Tr^*_\gamma(uv)Tr^*_\alpha(c_1(\lambda')) && \text{4.2 ლემის და (1) ფორმულის თანახმად}\\
&= Tr^*_\gamma(uv\cdot\rho^*_\gamma Tr^*_\alpha(c_1(\lambda'))) && \text{ფრობენიუსის ფორმულით}\\
&= Tr^*_\gamma(uv\cdot Tr^*_{\lambda^2}(\rho^*_{\lambda^2}(v))) && \text{ორმაგი კოსეტების ფორმ. და 4.2ლემით}\\
&= Tr^*_\gamma(Tr^*_{\lambda^2}(\rho^*_{\lambda^2}(uv^2))) && \text{ფრობენიუსის ფორმულით}\\
&= Tr^*_\gamma(uv\cdot Tr^*_{\lambda^2}(1)) = Tr^*_\gamma(uv^2\cdot v_s c_1^{2^s-1}(\lambda^2)) && Tr^*(1) \text{ ფორმულის თანახმად}\\
&= v_sT(uv^2)a^{2^s-1} && \alpha,\ \lambda,\ \text{და } T \text{ -ს განსაზღვრების თანახმად.}
\end{aligned}
$$

$cT = 0$ თანაფარდობის დამტკიცება ადვილია:

$$
cT \equiv cTr^*_\gamma(uv) = Tr^*_\gamma(uv\gamma^*(c)) = Tr^*_\gamma(uv\cdot 0) = 0.
$$

მოდით ახალა დავამტკიცოთ მე-10 თანაფარდობა.
ვთქვათ $u' = tu$ და $v' = tv$, სადაც t ინვოლუციაა (6) ფორმულიდან და $Tr^* = Tr^*_\gamma$.
მაშინ

$$
\begin{aligned}
Tr^*(uv) + Tr^*(uv') &= Tr^*(u(v+v')) = Tr^*(u)Tr^*(v),\\
Tr^*(uv)Tr^*(uv') &= Tr^*(uv(uv'+u'v))\\
&= Tr^*(u^2vv') + Tr^*(v^2uu') = Tr^*(u^2)y_2 + Tr^*(v^2)x_2.
\end{aligned}
$$

ასევე

$$
\begin{aligned}
Tr^*(u^2) =& Tr^*(u(u+u') - uu') = Tr^*(u)x_1 - Tr^*(1)x_2,\\
Tr^*(v^2) =& Tr^*(v(v+v') - vv') = Tr^*(v)y_1 - Tr^*(1)y_2.
\end{aligned}
$$

გამოვიყენოთ ეს ფორმულები და გავითვალისწინოთ, რომ $Tr^*(1)x_1 = Tr^*(1)y_1 = 0$. ეს გვაძლევს $T = Tr^*_\gamma(uv)$ კვადრატული განტოლებას

$$
\begin{aligned}
T^2 = & T(c + x_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}})(c + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}})\\
& + x_2y_1(c + y_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} y_2^{2^{i-1}}) + x_1y_2(c + x_1 + \sum_{i=1}^{s-1} c^{2^s-2^i} x_2^{2^{i-1}}).
\end{aligned}
$$

ახლა, რომ მივიღოთ მე-10 თანაფარდობა, გავიხსენოთ ტოლობა $cT = 0$. □

x_1 და y_1-ის გაშლები მიიღება (4) ფორმულის გამოყენებით $\rho_!\nu$-ის და $\rho_!\lambda$-ის დეტერმინანტებზე.

ჩვენ დაგვჭირდება $(x_1x_2)^{2^{2s-2}} = 0$ და $(y_1y_2)^{2^{2s-2}} = 0$. 2.1 თეორემის ii) თანაფარდობიდან გამომდინარეობს უფრო მეტიც, ჩვენ გვაქვს $(x_1x_2)^{2^s} = (y_1y_2)^{2^s} = 0$: კერძოდ, გაშლებით $x_1^{2^s} = (bc)^{2^{s-1}}$ და $y_1^{2^s} = (ac)^{2^{s-1}}$ გვაქვს

$$x_1^{2^s} b = x_1^{2^s} c = x_1^{2^s} a^2 = y_1^{2^s} a = y_1^{2^s} c = y_1^{2^s} b^2 = 0,$$

რადგან $a^2c = ac^2$, $b^2c = bc^2$ და $a^{2^s} = b^{2^s} = c^{2^s} = 0$.

ანუ, ზემოთმოყვანილი $x_2^{2^s}$-ის გაშლის ფორმულაში, ყოველი წევრის ნამრავლი $x_1^{2^s}$-ზე ნულის ტოლია. ანალოგიურად კეთდება y_1 და y_2. ასევე ცხადია, რომ დეტერმინანტის ეილერის კლასების დასათვლელად (იხილეთ პარაგრაფი 4.1) ყველა შემთხვევისთვის გვჭირდება ფორმალური ჯგუფის მხოლოდ საწყისი ფრაგმენტი $F(x,y) = x + y + (xy)^{2^{s-1}}$. კერძოდ,

G_{36} ჯგუფისთვის გამოვიყენოთ (4)ფორმულა და გავითვალისწინოთ, $det(\rho_!\lambda) = \gamma$ და $det(\rho_!\nu) = \beta$.

G_{37} ჯგუფისთვის გვაქვს $det(\rho_!\lambda) = 1$ და $det(\rho_!\nu) = \beta\gamma$, ამიტომ $e(det(\rho_!\lambda)) = 1$ და $e(det(\rho_!\nu)) = F(b,c) = b + c + (bc)^{2^{s-1}}$.

□

4.3 წარმომქმნელები

ჩვენ დავამტკიცებთ შემდეგ ლემას:

ლემა 4.6. *ვთქვათ G არის ერთ-ერთი შემდეგი ჯგუფებიდან $G_{34}, \dots, G_{37}$. მაშინ $K(s)^*(BG)$ არის წარმოქმნილი c, a, b, x_2, y_2, T-ით, როგორც $K(s)^*(pt)$ ალგებრა.*

დამტკიცება. გავიხსენოთ, რომ G_{34} და G_{35} აქვთ მაქსიმალური აბელური ქვეჯგუფი $H = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \cong C_4 \times C_4$ რომელზეც, ფაქტორჯგუფი მოქმედებს დიაგონალურად $\mathbf{a}$ და $\mathbf{b}$-ს შებრუნებით.

განვიხილოთ $K(s)^*(BH)$-ის გაშლა თავისუფალ და ტრივიალურ C_2 მოდულებად

$$[K(s)^*(BH)]^{C_2} = (F)^{C_2} + T.$$

თეორემა 2.1-ის წარმომქმნელების შეზღუდვა $K(s)^*(BH)$-ზე აღვნიშნოთ იგივე, ოღონდ თავზე ხაზიანი სიმბოლოებით.

ვთქვათ, A იყოს $K(s)^*(BG)$ -ის ქვეალგებრა c, a, b, x_2, y_2, T წარმომქმნელებით. ცხადია $\rho^* Tr^* = \mathrm{Norm} = 1 + \mathrm{involution}$ კომოზიცია არის ზე ასახვა $(F)^{C_2}$-ზე.

მაგრამ, $ImTr^* \subset A$: რაკი $u^2 = u\bar{x_1} - \bar{x_2}$ და $v^2 = v\bar{y_1} - \bar{y_2}$, ნებისმიერი u, v ცვლადების პილინომი ცალსახად შეიძლება ჩაიწეროს, როგორც $g_0 + g_1 u + g_2 v + g_3 uv$ სადაც $g_i = g_i(\bar{x_1}, \bar{y_1}, \bar{x_2}, \bar{y_2})$. ამიტომაც შეგვიძლია გამოვიყენოთ ტრანსფერის ფრობენიუსის შებრუნებადობის თვისება და ნებისმიერი ელემენტის ტრანსფერი ჩავწეროთ $Tr^*(u)$,$Tr^*(v)$,$Tr^*(uv)$, და c, x_1, x_2, y_1, y_2 ცვლადებში. შემდეგ ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ პარაგრაფ 1.6-ში განხილული (2), (3) ფორმულები, შესაბამისად $Tr^*(u)$, $Tr^*(v)$-სთვის, აგრეთვე x_1 და y_1 გაშლები 2.1თეორემიდან და ვაჩვენოთ, რომ

$$ImTr^* \subset A. \tag{16}$$

ამიტომაც $\rho^*(A)$-ც არის ასახვა $(F)^{C_2}$-ზე.

შემდეგ, ჩვენ უნდა შევამოწმოთ T-ს ინვარიანტები იფარებიან თუ არა $\rho^* A$ ასახვით. ვთქვათ $\chi_s((F)^{C_2})$ და $\chi_s(T)$ იყოს $K(s)^*$-ს ეილერის მახასიათებლები, მაშინ

$$\chi_s(BH) = 2\chi_s(F) + \chi_s(T), \;\; \chi_s(BH)^{C_2} = \chi_s(F) + \chi_s(T).$$

ვთქვათ, $M^{C_2} = (F')^{C_2} + T'$.

ანუ

$$H = (F' + tF' + T') \otimes (F' + tF' + T')$$

და

$$\chi(H^{C_2}) = \chi(T' \otimes T') + \chi(T' \otimes (F' + tF')) + \chi((F' + tF') \otimes T') +$$
$$+ \chi((F' + tF') \otimes (F' + t(F')) + \chi((F' \otimes F') + tF' \otimes F') = r(T')^2 + 2r(F')r(T') + 2r(F')^2$$

მაშინ ადვილად შეიძლება ამოკითხვა $(F')^{C_2}$ და T' ბაზისების. [40] შრომაში შეგვიძლია ვნახოთ შემდეგი

$$\chi_s(F'^{C_2}) = 2^{2s-1} - 2^{s-1}, \qquad \{c_1 c_2^j \,|\, 0 \le j < 2^{s-1}, c_2^k, k \ne j, k \ne j + 2^{s-1}\},$$
$$\chi_s(T') = 2^s, \qquad \{c_2^i, x c_2^i \;|\, 0 \le i \le 2^{s-1} - 1\}.$$

ეს ბოლო ფაქტი და (16) ფორმულა უკვე ასრულებს 4.6 ლემის დამტკიცებას თუ გამოვიყენებთ 1.1 თეორემას. უფრო მეტიც, სინამდვილეში ჩვენ გამოვთვალეთ $\chi_s(G)$-ც: ადგილი აქვს

$$\chi_s(T) = \chi_s(T')^2 = 4^s \quad \text{და} \quad \chi_s(F) = 2\chi_s(F')\chi_s(T') + 2\chi_s(F')^2 = \frac{1}{2}16^s - \frac{1}{2}4^s.$$

.

ამრიგად, მივიღებთ [23]შრომიდან უკვე ცნობილ ფაქტს:

$$\chi_s(G) = \chi_s(F) + 2^s\chi_s(T) = \frac{1}{2}16^s - \frac{1}{2}4^s + 8^s. \tag{17}$$

G_{36} შეიცავს მაქსიმალურ აბელურ ქვეჯგუფს $H = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}^2, \mathbf{c} \rangle \cong C_4 \times C_2 \times C_2$. განსაზღვრებიდან შეიძლება ამოკითხულ იქნას, რომ $K(s)^*(BH) = M \otimes N$, სადაც $N = K(s)^*(BC_2 \times BC_2)$, გადასმის მოქმედებით. ეს სიტუაცია მსგავსია G_{37} და $H = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$ შემთხვევის.

□

4.4 დამტკიცების დასასრული

4.6 ლემის შემდეგ, საკმარისია დავრწმუნდეთ, რომ $G = G_{36}, G_{37}$ ჯგუფებისთვის 2.1 თეორემის თანაფარდობები გვაძლევენ რგოლებს (17) ფორმულაში გამოთვლილი ეილერის მახასიათებლით. ასევე განხილული ჯგუფებისთვის, უნდა ავირჩიოთ ბაზისი $K(s)^*(BG)$-სთვის როგორც $K(s)^*(BG)/ker\rho^*$-ის და $ker\rho^*$-ის ბაზისების გაერთიანება, სადაც $\rho : BH \to BG$ ორმაგი დაფარვაა.

ლემა 4.7. *$K(s)^*(BG)$-ის ბაზისი, როცა $G = G_{36}, G_{37}$ არის*
$\{x_1^i y_1^j x_2^k y_2^l | i,j < 2^s, k,l < 2^{s-1}\}$;
$\{a x_2^{k+2^{s-1}} y_2^l | k,l < 2^{s-1}\}$;
$\{x_1^i a x_2^k y_2^l,\ y_1^i x_2^{k+2^{s-1}} y_2^l | i < 2^s, k,l < 2^{s-1}\}$;
$\{T x_1^i y_1^j x_2^k y_2^l | i,j < 2^s - 1, k,l < 2^{s-1}\}$;
$\{c^i x_2^j y_2^k,\ c^i a x_2^j y_2^k | 0 < i < 2^s, j < 2^s, k < 2^{s-1}\}$.

დამტკიცება. შეიძლება შემოწმდეს, რომ ა) ლემის პირველი ოთხი სიმრავლე გვაძლევს ბაზისს $K(s)^*(BG)/ker\rho^*$ - თვის, და ბ) ბოლო სიმრავლე გვაძლევს ბაზისს $ker\rho^*$ -თვის.
ა) პუნქტის შესამოწმებლად ავირჩიოთ ლექსიკოგრაფიული დალაგება, რომელიც შეესაბამება $(T, a, b, y_2, x_2, y_1, x_1, c)$ დალაგებას.

აქ ჩვენ შეგვიძლია ვიმუშაოთ $\mod c$.

კომპიუტერული პროგრამა SINGULAR-ის დახმარებით შეიძლება შემოწმდეს, რომ როცა $s = 3$ გვაქვს

> ring $R = 2, (T, a, b, x_2, y_2, y_1, x_1, c), lp$;

> ideal $I = (c, a^8, b^8, c^8, x_1 + x_2^4 + x_1^4 x_2^{16} + b + c + b^4 c^4, y_1 + y_2^4 + y_1^4 y_2^{16}, c(c + x_1 + c^6 x_2 + c^4 x_2^2), c(c + y_1 + c^6 y_2 + c^4 y_2^2), a(a + y_1 + a^6 y_2 + a^4 y_2^2), b(b + x_1 + b^6 x_2 + b^4 x_2^2), y_2^8 + a^2 + ac + c^2, x_2^8 + bc, (c + x_1 + c^6 x_2 + c^4 x_2^2)(a + y_1 + a^6 y_2 + a^4 y_2^2) + a^7 T,$

$(c + y_1 + c^6 y_2 + c^4 y_2^2)(b + x_1 + b^6 x_2 + b^4 x_2^2) + b^7 T, T^2 + T x_1 y_1 + x_2 y_1 (c + y_1 + c^6 y_2 + c^4 y_2^2) + x_1 y_2 (c + x_1 + c^6 x_2 + c^4 x_2^2), T(b + x_1 + b^6 x_2 + b^4 x_2^2) + b^7 x_2 (c + y_1), T(a + y_1 + a^6 y_2 + a^4 y_2^2) + a^7 y_2 (c + x_1), cT)$;

$> vdim(std(I))$;

2080

ეს კოდი დააბრუნებს პასუხს, რომელიც შეიცავს 2080 საბაზისო მონომს. ეს პასუხი არის $K(s)^*(BG)/ker\rho^*$-ის გრობნერის ბაზისი, რომელიც ემთხვევა ლემა 4.7-ის პირველი ოთხი სიმრავლის გაერთიანებას.

ბ) პუნქტის შესამოწმებლად ავირჩიოთ $(T, x_1, y_1, a, b, x_2, y_2, c), lp$-ის შესაბამისი ლექსიკოგრაფიული დალაგება. შესაბამისი ბაზისის ამოსაკითხად, ჩვენ უნდა გავაკეთოთ კიდევ ერთი რამ, კერძოდ,

$$x_2^j y_2^{2^{2s-1}+k} = x_2^j y_2^{2^{2s-1}} y^k$$

მონომები უნდა შევცვალოთ შემდეგი მონომებით

$$ac^{2^s-1} x_2^j y^k,\ j < 2^s,\ k < 2^{s-1}.$$

ეს შეიძლება გაკეთდეს თეორემა 2.1-ის შემდეგი თანაფარდობით

$$y_2^{2^{2s-1}} = y_1^{2^s} = (ac)^{2^{s-1}} = ac^{2^s-1}.$$

შევნიშნოთ, რომ ლემა 4.7-ის ბოლო სიმრავლე არის შემდეგი ორი სიმრავლის გაერთიანება

$$\{c^i x_2^j y_2^k,\ c^i a x_2^j y_2^k, | 0 < i < 2^s - 1\},$$

როგორც $ker\rho^* \bigcap K(s)^*(BG)/ImTr^*$-ის ბაზისი ($8^s - 4^s$ ელემენტით) და

$$\{c^{2^s-1}x_2^j y_2^k,\ c^{2^s-1}ax_2^j y_2^k\},$$

როგორც ტრივიალური მოდულის ანასახის $Tr^*(T)$-ის ბაზისი. ამ ბოლო წინადადებისთვის გავიხსენოთ, რომ $Tr^*(1) = v_s c^{2^s-1}$.

SINGULAR-ის დახმარებით შეიძლება შემოწმდეს, რომ როცა $s = 3$ გვაქვს

>ring $RR = 2, (T, x_1, y_1, a, b, x_2, y_2, c), lp;$

> ideal $II = (a^8, b^8, c^8, x_1 + x_2^4 + x_1^4 x_2^{16} + b + c + b^4c^4, y_1 + y_2^4 + y_1^4 y_2^{16}, c(c + x_1 + c^6x_2 + c^4x_2^2), c(c+y_1+c^6y_2+c^4y_2^2), a(a+y_1+a^6y_2+a^4y_2^2), b(b+x_1+b^6x_2+b^4x_2^2), y_2^8+a^2+ac+c^2, x_2^8+bc, (c + x_1 + c^6x_2 + c^4x_2^2)(a + y_1 + a^6y_2 + a^4y_2^2) + a^7T,$

$(c+y_1+c^6y_2+c^4y_2^2)(b+x_1+b^6x_2+b^4x_2^2)+b^7T, T^2+Tx_1y_1+x_2y_1(c+y_1+c^6y_2+c^4y_2^2)+x_1y_2(c+x_1+c^6x_2+c^4x_2^2), T(b+x_1+b^6x_2+b^4x_2^2)+b^7x_2(c+y_1), T(a+y_1+a^6y_2+a^4y_2^2)+a^7y_2(c+x_1), cT);$

$> vdim(std(II));$

2528

აქ მხედველობაში ვიღებთ, რომ $y_1^{2^s} = y_2^{2^{2s-1}} = (ac)^{2^{s-1}} = ac^{2^s-1}$.

□

5 თეორემა 3.1-ის დამტკიცება

$G = G_{34}, G_{35}$ ჯგუფებისთვის თეორემის დამტკიცებას უფრო მოკლედ შემოგთავაზებთ, რადგან გამოყენებულია იგივე არგუმენტები რაც $G = G_{36}, G_{37}$ ჯგუფებისთვის.

5.1 თანაფარდობები ფიბრაციებზე

ვთქვათ, ორივე ჯგუფისთვის $\rho : BH \to BG$ იყოს ორმაგი დაფარვა $\rho = \rho(H, G)$ და $\rho_! \lambda = Ind_H^G(\lambda)$, $\rho_! \nu = Ind_H^G(\nu)$.

$G = G_{34}$ ჯგუფისთვის გვექნება შემდეგი:

დეტერმინანტები	*ნამრავლის თანაფარდობები*
$det(\rho_!\lambda) = \gamma,\ det(\rho_!\nu) = \gamma;$	$iii)\ \ \alpha\rho_!\lambda = \rho_!\lambda,\ \ \gamma\rho_!\lambda = \rho_!\lambda;$
შეზღუდვები	$iv)\ \ \beta\rho_!\nu = \rho_!\nu,\ \ \gamma\rho_!\nu = \rho_!\nu;$
$i)\ \ \rho^*\alpha = \lambda^2,\ \ \rho^*\beta = \nu^2,\ \ \rho^*\gamma = 1;$	$v)\ \ (\rho_!\nu)^2 = 1 + \beta + \gamma + \beta\gamma;$
$ii)\ \ \rho^*(\rho_!\lambda) = \lambda + \lambda^3,\ \ \rho^*(\rho_!\nu) = \nu + \nu^3;$	$vi)\ \ (\rho_!\lambda)^2 = 1 + \alpha + \gamma + \alpha\gamma.$

G_{35} ჯგუფისთვისაც მსგავსი ხარაქტერების ცხრილები გვექნება რაც G_{34} ჯგუფისთვისაა. ერთადერთი განსხვავება ამ ცხრილებში მხოლოდ $\lambda_!$ დეტერმინანტშია, ხოლო, ყველა შეზღუდვა და ნამრავლი იგივე ექნება.

$$det(\rho_!\lambda) = 1,\ det(\rho_!\nu) = \gamma.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ G_{34} ჯგუფი და მისი $H = \langle a, b\rangle$ ქვეჯგუფი. გამოვთვალოთ $\lambda_!$-ს დეტერმინანტი.

$$a(V_1 + cV_2) = aV_1 + acV_2 = aV_1 + ca^{-1}V_2,\ \lambda(a) = i,$$

ამიტომ $\lambda_!(a) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

$$b(V_1 + cV_2) = bV_1 + bcV_2 = bV_1 + cb^{-1}V_2,\ \lambda(b) = 1,$$

ამიტომ $\lambda_!(b) = E.$

$$c(V_1 + cV_2) = cV_1 + V_2,\ \lambda(c) = 1,$$

ამიტომ $\lambda_!(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$det(\rho_!\lambda) = \gamma,$$

რადგან $det(c) = -1.$

ახლა გამოვთვალოთ G_{35} ჯგუფისთვის და $H = \langle a, b\rangle$ ქვეჯგუფისთვის $\lambda_!$-ს დეტერმინანტი.

$$a(V_1+cV_2)=aV_1+acV_2=aV_1+ca^3V_2,\ \lambda(a)=i,$$

ამიტომ $\lambda_!(a)=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

$$b(V_1+cV_2)=bV_1+bcV_2=bV_1+cb^3V_2,\ \lambda(b)=1,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\lambda_!(b)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$c(V_1+cV_2)=cV_1+c^2V_2=cV_1+a^2V_2,\ \lambda(c)=1,\ \lambda(a^2)=-1,$$

ამიტომ მივიღებთ, რომ $\lambda_!(c)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

ანუ დამტკიცდა, რომ $det(\rho_!\lambda)=1$.

ანალოგიურად გამოვთვალოთ G_{34} ჯგუფისთვის $\nu_!$-ს დეტერმინანტი, სადაც $H=\langle a,b\rangle$ G_{34}-ის ქვეჯგუფია.

$$a(V_1+cV_2)=aV_1+acV_2=aV_1+ca^{-1}V_2,\ \nu(a)=1,$$

ამიტომ $\nu_!(a)=E$

$b(V_1+cV_2)=bV_1+bcV_2=bV_1+cb^{-1}V_2,\ \nu(b)=i$, ამიტომ $\nu_!(b)=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

$$c(V_1+cV_2)=cV_1+V2,\ \nu(c)=1,\ \nu(c)=1,$$

ამიტომ $\nu_!(c)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ზემოაღნულებიდან შეგვიძლია ვთქვათ, რომ დამტკიცდა $det(\rho_!\nu)=\gamma$ რადგან მისი სიდიდე უდრის -1-ს c-ზე, და უდრის 1-ს a,b-ზე

ახლა გამოვთვალოთ G_{35} ჯგუფისთვის $\nu_!$-ს დეტერმინანტი სადაც, $H=\langle a,b\rangle$ G_{34}-ის ქვეჯგუფია.

$$a(V_1+cV_2)=aV_1+acV_2=aV_1+ca^3V_2,\ \nu(a)=1,$$

ამიტომ $\nu_!(a)=E$.

$$b(V_1+cV_2)=bV_1+bcV_2=bV_1+cb^3V_2,\ \nu(b)=i,$$

ამიტომ $\nu_!(b)=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

$$c(V_1+cV_2)=cV_1+c^2V_2=cV_1+a^2V_2,\ \nu(c)=\nu(a^2)=1,$$

მაშასადამე $\nu_!(c)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ამრიგად, $det(\rho_!\nu)=\gamma$. ამით დეტერმინანტების გამოთვლა დასრულებულია.

ახლა დავამტკიცოთ შეზღუდვების ტოლობები.

ორივე ჯგუფისთვის გვაქვს: i) $\rho^*\alpha = \lambda^2, \quad \rho^*\beta = \nu^2, \ \rho^*\gamma = 1,$

G_{34} ჯგუფისთვის თანაფარდობების დამტკიცება მიიღებს შემდეგ სახეს:
ii) $\rho^*\lambda_! = \lambda + \lambda^3, \quad \rho^*\nu_! = \nu + \nu^3$; რადგან $c^{-1} \in G/H$, $caa^{-1} = a^{-1}$, და $cbc^{-1} = b^{-1}$.

ნამრავლის თანაფარდობები:
iii) $\alpha\lambda_! = \lambda_!, \quad \gamma\lambda_! = \lambda_!$ $\alpha\lambda_! = (\lambda^2\lambda)_! = (\lambda^3)_! = \lambda_!$ რადგან ტრანსფერი არის მუდმივი ორბიტზე.
$\gamma\lambda_! = (1\lambda)_! = \lambda_!$, რადგან $\rho^*\gamma = 1$.

iv) $\beta\nu_! = \nu_!, \quad \gamma\nu_! = \nu_!$;
$\beta\nu_! = (\mu\nu)_! = \nu_!$, რადგან ტრანსფერი არის მუდმივი ერთი ორბიტის ელემენტზე.
$\gamma\nu_! = (1\nu)_! = \nu_!$, რადგან $\rho^*\gamma = 1$.

v) $(\nu_!)^2 = 1 + \beta + \gamma + \beta\gamma$. $(\nu_!)^2 = (\nu(\nu + \nu^3))_! = (\nu^2 + 1)! = (1 + \gamma)\beta + 1 + \gamma = 1 + \beta + \gamma + \beta\gamma$ რადგან $1_! = 1 + \gamma$.

vi) $(\lambda_!)^2 = (\lambda(\lambda + \lambda^3)_! = 1 + \alpha + \gamma + \alpha\gamma$. $(\lambda_!)^2 = (\lambda(\lambda + \lambda^3))_! = (\lambda^2 + 1) = (1 + \gamma)\alpha + 1 + \gamma = 1 + \alpha + \gamma + \alpha\gamma$, ვინაიდან $\lambda^4 = 1, \rho^*\alpha = \lambda^2$, და $1_! = 1 + \gamma$.

G_{35} ჯგუფისთვის თანაფარდობების დამტკიცება მიიღებს შემდეგ სახეს:
ii) $\rho^*\lambda_! = \lambda + \lambda^3$, $\rho^*\nu_! = \nu + \nu^3$; ვინაიდან $c^{-1} \in G/H$, $caa^{-1} = a^{-1}$, და $cbc^{-1} = b^{-1}$.

ნამრავლის თანაფარდობები:
iii) $\alpha\lambda_! = \lambda_!, \gamma\lambda_! = \lambda_!$ $\alpha\lambda_! = (\lambda^2\lambda)_! = (\lambda^3)_! = \lambda_!$ რადგან ტრანსფერი არის მუდმივი ორბიტზე.
$\gamma\lambda_! = (1\lambda)_! = \lambda_!$, რადგან $\rho^*\gamma = 1$.

iv) $\beta\nu_! = \nu_!, \gamma\nu_! = \nu_!$; $\beta\nu_! = (\mu\nu)_! = \nu_!$, რადგან ტრანსფერი არის მუდმივი ორბიტზე.
$\gamma\nu_! = (1\nu)_! = \nu_!$, რადგან $\rho^*\gamma = 1$.

v) $(\nu_!)^2 = 1 + \beta + \gamma + \beta\gamma$. $(\nu_!)^2 = (\nu(\nu + \nu^3))_! = (\nu^2 + 1)! = (1 + \gamma)\beta + 1 + \gamma = 1 + \beta + \gamma + \beta\gamma$ რადგან $1_! = 1 + \gamma$.

vi) $(\lambda_!)^2 = (\lambda(\lambda + \lambda^3)_! = 1 + \alpha + \gamma + \alpha\gamma$.
$(\lambda_!)^2 = (\lambda(\lambda + \lambda^3))_! = (\lambda^2 + 1) = (1 + \gamma)\alpha + 1 + \gamma = 1 + \alpha + \gamma + \alpha\gamma$, რადგან $\lambda^4 =, \rho^*\alpha = \lambda^2$, და $1_! = 1 + \gamma$.

$\square$

iii)-ს პირველი თანაფარდობიდან ჩანს, რომ $\rho_!\lambda$ ასევე უნდა იყოს ტრანსფერი წრფივი ფიბრაციისა BHზე α-ს შესაბამისი ორმაგი დაფარვისთვის. კერძოდ, გვაქვს:

ლემა 5.1. *ვთქვათ, G იყოს G_{34} ან G_{35}. მაშინ არსებობს ქვეჯგუფი $H' \subset G$ და წრფივი ფიბრაცია $\lambda' \to BH'$ ისეთი, რომ $Ind_H^G(\lambda) = Ind_{H'}^G(\lambda')$. ფიბრაცია α გადადის ტრივიალურ ფიბრაციაში BH'-სივრცეზე.*

დამტკიცება. ავარჩიოთ ქვეჯგუფი $H' = \langle \mathbf{a}^2, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ და წრფივი ფიბრაცია λ', რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს

$$\lambda'(\mathbf{a}^2) = -1, \lambda'(\mathbf{b}) = 1, \lambda'(\mathbf{c}) = 1.$$

განვიხილოთ შემდეგი ტოლობები G_{34} ჯგუფისთვის და $\lambda'_!$-სთვის:

$$a(V_1 + aV_2) = aV_1 + a^2V_2 = a^2V_2 + aV_1, \ \lambda'(a^2) = -1$$

ამიტომ $\lambda'_!(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$b(V_1 + aV_2) = bV_1 + baV_2 = bV_1 + abV_2, \ ab = ba, \ \lambda'(b) = 1,$$

ამიტომ $\lambda'_!(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$c(V_1 + aV_2) = cV_1 + caV_2 = cV_1 + a(a^2c)V_2.\ cac = a^3,\ ca = a^{-1}c = a^3c,\ \lambda'(c) = 1,$$

ამიტომ $\lambda'_!(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $det(\rho_!\lambda') = \gamma$, რადგან მისი სიდიდე უდრის -1-ს c-ზე, და უდრის 1-ს a, b-ზე.

$ii)$ $\rho^*\lambda'_! = \lambda' + \lambda'\mu$,
$t^*\lambda'(a^2) = \lambda'(t^*(a^2)) = \lambda'(a^2) = -1;$
$t^*\lambda'(b) = \lambda'(t^*(b)) = \lambda'(aba^{-1}) = \lambda'(aa^3b) = \lambda'(b) = 1;$
$t^*\lambda'(c) = \lambda'(t^*(c)) = \lambda'(aca^{-1}) = \lambda'(aca^3) = \lambda'(ca^2) = -1;\ ac = ca^{-1}$
$\alpha\lambda'_! = (1.\lambda')_! = \lambda'_!$
$\gamma\lambda'_! = (\mu.\lambda')_! = \lambda'_!$
$(\lambda'_!)^2 = (\lambda'_!)(\lambda'_!) = ((\lambda' + \lambda'\mu)\lambda')_! = (1 + 1.\mu)_! = 1 + \alpha + \gamma(1 + \alpha) = 1 + \alpha + \gamma + \alpha\gamma$

განვიხილოთ შემდეგი ტოლობები G_{35} ჯგუფისთვის და $\lambda'_!$-სთვის:

$$a(V_1 + aV_2) = aV_1 + a^2V_2 = a^2V_2 + aV_1,\ \lambda'(a^2) = -1$$

ამიტომ $\lambda'_!(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$b(V_1 + aV_2) = bV_1 + baV_2 = bV_1 + abV_2,\ ab = ba,\ \lambda'(b) = 1,$$

ამიტომ $\lambda'_!(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$c(V_1 + aV_2) = cV_1 + caV_2 = cV_1 + a(a^2c)V_2,\ ca = a^3c = a(a^2c),\ \lambda'(c) = 1,$$

ამიტომ $\lambda'_!(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $det(\rho_!\lambda') = \gamma$ რადგან, მისი სიდიდე უდრის -1-ს c-ზე, და უდრის 1-ს a, b-ზე.

$ii)$ $\rho^*\lambda'_! = \lambda' + \lambda'$,
$t^*\lambda'(a^2) = \lambda'(t^*(a^2)) = \lambda'(a^2) = -1;$
$t^*\lambda'(b) = \lambda'(t^*(b)) = \lambda'(aba^{-1}) = \lambda'(aa^3b) = \lambda'(b) = 1;$
$t^*\lambda'(c) = \lambda'(t^*(c)) = \lambda'(aca^{-1}) = \lambda'(ac^3ca) = \lambda'(c^3) = 1;\ cac^{-1} = a^{-1},\ c^2ac^3 = ca^{-1},\ a^3c^3 = ca^{-1},\ a^4c^3 = aca^{-1},\ c^3 = aca^{-1}$
$\alpha\lambda'_! = (1.\lambda')_! = \lambda'_!$
$\gamma\lambda'_! = (1.\lambda')_! = \lambda'_!$
$(\lambda'_!)^2 = (\lambda'_!)(\lambda'_!) = ((\lambda' + \lambda')\lambda')_! = (1 + 1.\lambda'^2)_! = 1 + \alpha + \gamma(1 + \alpha) = 1 + \alpha + \gamma + \alpha\gamma$

□

წინა ლემის მსგავსად, გვაქვს შემდეგი ლემა $\rho_!\nu$-სთვის iv) თანაფარდობის პირველი ტოლობის მიხედვით.

ლემა 5.2. *ვთქვათ, G არის G_{34} ან G_{35}. მაშინ არსებობს ქვეჯგუფი $H'' \subset G$ და წრფივი ფიბრაცია $\nu' \to BH''$ ისეთი, რომ $Ind_H^G(\nu) = Ind_{H''}^G(\nu')$. ფიბრაცია β გადადის ტრივიალურ ფიბრაციაში BH''-სივრცეზე.*

დამტკიცება. პირველ რიგში ავირჩიოთ ქვეჯგუფი $H'' = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}^2, \mathbf{c} \rangle$ და წრფივი ფიბრაცია ν' რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\nu'(\mathbf{a}) = 1, \nu'(\mathbf{b}^2) = -1, \nu'(\mathbf{c}) = 1.$$

განვიხილოთ შემდეგი ტოლობები G_{34} ჯგუფისთვის და $\nu'_!$-სთვის:

$$a(V_1 + bV_2) = aV_1 + abV_2 = aV_1 + baV_2,$$

ამიტომ $\nu'_!(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$b(V_1 + bV_2) = bV_1 + b^2V_2 = b^2V_2 + bV_1, \ \nu'(b^2) = -1,$$

ამიტომ $\nu'_!(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$c(V_1 + bV_2) = cV_1 + cbV_2 = cV_1 + b(b^2c)V_2,$$

ამიტომ $\nu'_!(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $det(\rho_! \nu') = \gamma$ რადგან მისი სიდიდე უდრის -1-ს c-ზე, და უდრის 1-ს a, b-ზე.

G_{34} ჯგუფისთვის დავამტკიცოთ შემდეგი თანაფარდობები:

$ii)$ $\rho^* \nu'_! = \nu' + \nu'\mu$,
$t^*\nu'(a) = \nu'(t^*(a)) = \nu'(bab^{-1}) = \nu'(bb^3a) = \nu'(a) = 1;$
$t^*\nu'(b) = \nu'(t^*(b^2)) = \nu'(b^2) = -1;$
$t^*\nu'(c) = \nu'(t^*(c)) = \nu'(bcb^{-1}) = \nu'(cb^2) = -1; \ bc = cb^3$
$\beta\nu'_! = (\nu'^2.\nu')_! = \nu'_!$
$\gamma\nu'_! = (\mu.\nu')_! = \nu'_!$
$(\nu'_!)^2 = (\nu'_!)(\nu'_!) = ((\nu' + \nu'\mu)\nu')_! = (1 + 1.\mu)_! = 1 + \beta + \gamma(1 + \beta) = 1 + \beta + \gamma + \beta\gamma$
განვიხილოთ შემდეგი ტოლობები G_{35} ჯგუფისთვის და $\nu'_!$-სთვის

$$a(V_1 + bV_2) = aV_1 + abV_2 = aV_1 + baV_2,$$

ამიტომ $\nu'_!(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$b(V_1 + bV_2) = bV_1 + b^2V_2 = b^2V_2 + bV_1, \ \nu'(b^2) = -1,$$

ამიტომ $\nu'_!(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$c(V_1 + bV_2) = cV_1 + cbV_2 = cV_1 + b(b^2c)V_2, \ \nu'(b^2) = -1,$$

ამიტომ $\nu'_!(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $det(\rho_! \nu') = \gamma$ რადგან მისი სიდიდე უდრის -1-ს c-ზე, და უდრის 1-ს a, b-ზე.

G_{35} ჯგუფისთვის დავამტკიცოთ შემდეგი თანაფარდობები:

$ii)$ $\rho^*\nu'_! = \nu' + \nu'\mu$,
$t^*\nu'(a) = \nu'(t^*(a)) = \nu'(bab^{-1}) = \nu'(a) = 1;$
$t^*\nu'(b^2) = \nu'(t^*(b^2)) = nu'(b^2) = -1;$
$t^*\nu'(c) = \nu'(t^*(c)) = \nu'(bcb^{-1}) = \nu'(b^2c) = -1;\ cb^{-1} = c^2bc^{-1},\ bcb^{-1} = bc^2bc^{-1} = ba^2bc^3 = b^2a^2a^2c = b^2c$
$\beta\nu'_! = (\nu'^2.\nu')_! = \nu'_!$
$\gamma\nu'_! = (\mu.\nu')_! = \nu'_!$
$(\nu'_!)^2 = (\nu'_!)(\nu'_!) = ((\nu' + \nu'\mu)\nu')_! = (1 + 1.\mu)_! = 1 + \beta + \gamma(1 + \beta) = 1 + \beta + \gamma + \beta\gamma$
ანუ ლემის დამტკიცება დასრულებულია.

$\square$

5.2 დამტკიცების დასასრული

კომპლექსური წარმოდგენების შესახებ ზევით მოყვანილი ინფორმაციის გამოყენებით G_{34} და G_{35} ჯგუფებისთვის თეორემის დამტკიცება გაგრძელდება უკვე დამტკიცებული 2.1 თეორემის ანალოგიურად.

6 $K(2)^*(BG)$-რგოლების ჰილბერტ-პუანკარეს პოლინომები

გავიხსენოთ, რომ არსებობს 51 არაიზომორფული 32 რიგის ჯგუფი. [44] შრომაში ეს ჯგუფები გადანომრილია შემდეგნაირად $1, \cdots, 51$. ამ ჯგუფებიდან ზოგიერთი არის კლასიკური და არის დასახელებით.

განსაზღვრება 6.1. *განვიხილოთ 32 რიგის შემდეგი ჯგუფები*

$$
\begin{aligned}
&G_{34} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^4 = \mathbf{b}^4 = \mathbf{c}^2 = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 1, \mathbf{cac} = \mathbf{a}^{-1}, \mathbf{cbc} = \mathbf{b}^{-1} \rangle,\\
&G_{35} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^4 = \mathbf{b}^4 = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 1, \mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2, \mathbf{cac}^{-1} = \mathbf{a}^{-1}, \mathbf{cbc}^{-1} = \mathbf{b}^{-1} \rangle.\\
&G_{36} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^4 = \mathbf{b}^4 = \mathbf{c}^2 = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = 1, \mathbf{a}^{-1}\mathbf{ba} = \mathbf{b}^{-1}, \mathbf{cac} = \mathbf{a}^{-1} \rangle,\\
&G_{37} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^4 = \mathbf{c}^2 = \mathbf{d}^2 = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = 1, \mathbf{d} = [\mathbf{a}, \mathbf{c}], \mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^2, \mathbf{bab}^{-1} = \mathbf{a}^{-1} \rangle,\\
&G_{38} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^4 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^4 = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 1, \mathbf{cac}^{-1} = \mathbf{ac}^2, \mathbf{cbc}^{-1} = \mathbf{a}^2\mathbf{b} \rangle,\\
&G_{39} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^4 = \mathbf{b}^4 = \mathbf{c}^2 = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 1, \mathbf{cac} = \mathbf{a}^3, \mathbf{cbc} = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^3 \rangle,\\
&G_{40} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^4 = \mathbf{b}^4 = 1, \mathbf{c}^2 = \mathbf{b}^2, [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 1, \mathbf{c}^{-1}\mathbf{ac} = \mathbf{a}^3, \mathbf{c}^{-1}\mathbf{bc} = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^3 \rangle,\\
&G_{41} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \mid \mathbf{a}^4 = \mathbf{b}^4 = \mathbf{c}^2 = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 1, \mathbf{cac} = \mathbf{a}^3\mathbf{b}^2, \mathbf{cbc} = \mathbf{a}^2\mathbf{b} \rangle,\\
&D = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mid \mathbf{a}^{16} = 1, \mathbf{b}^2 = 1, \mathbf{bab}^{-1} = \mathbf{a}^{-1} \rangle, \text{ დიედრის ჯგუფი,}\\
&Q = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mid \mathbf{a}^{16} = 1, \mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^8, \mathbf{bab}^{-1} = \mathbf{a}^{-1} \rangle, \text{განზოგადოებული კვატერნიონების ჯგუფი,}\\
&SD = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mid \mathbf{a}^{16} = 1, \mathbf{b}^2 = 1, \mathbf{bab}^{-1} = \mathbf{a}^7 \rangle, \text{ ნახევრად დიედრის ჯგუფი,}\\
&QD = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mid \mathbf{a}^{16} = \mathbf{b}^2 = 1, \mathbf{bab}^{-1} = \mathbf{a}^9 \rangle, \text{ კვაზი დიედრის ჯგუფი,}
\end{aligned}
$$

მორავას $K(s)^*(BG)$ რგოლების დათვლა 32 რიგის ჯგუფებისთვის გაფანტულია სხვადასხვა შრომებში (იხ. [1], [30], [32], [33], [40], [22], [23], [24], [25]). უკეთესი თვალსაჩინოებისთვის ჩავსვათ $s = 2$ და განვიხილოთ $K(2)^*(BG)$ განსაზღვრება 6.1-ში მოყვანილი თორმეტივე ჯგუფისთვის. [33], [3]-ში დამტკიცებულია რომ $G_{34}, \cdots G_{41}$ ჯგუფებისთვის $K(s)^*(BG)$ რგოლი გაფაქტორებულია $K(s)^*(pt) = F_2[v_s, v_s^{-1}]$ ველზე 6 ცვლადის პოლინომიალური რგოლის იდეალით, რომელიც წარმოქმნილია 16 ცხადი სახით წარმოდგენილი პოლინომით, იხილეთ დებულება 6.3, სადაც $s = 2$, $v_2 = v$.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, $G_{34}, \cdots G_{41}$ ჯგუფებს აქვთ ტოლი ეილერის მახასიათებელი $\chi_{2,2}(G)$. უფრო მეტიც, ამ ჯგუფების მორავას K-თეორიის რგოლები ტყუპებივით გვანან ერთმანეთს. ამიტომ სასურველია მოიძებნოს ისეთი ინვარიანტი, რომელიც ზოგიერთ მათგანს მაინც განასხვავებს.

აქ ჩვენ გამოვთვლით ზემოთმოყვანილი ჯგუფების ჰილბერტ-პუანკარეს პოლინომებს, კომპიუტერული ალგებრის, SINGULAR-ის გამოყენებით. მათ შორის აღმოვაჩენთ ჯგუფების მაგალითებს, რომელთაც აქვთ ტოლი ეილერის მახასიათებელი $\chi_{2,2}(G)$ მაგრამ განსხვავებული ჰილბერტ-პუანკარეს პოლინომი.

გავიხსენოთ ჰილბერტ-პუანკარეს ხარისხოვანი მწკრივის განსაზღვრება: R კომუტაციურ რგოლს ეწოდება N-გრადუირებული თუ ის შეიძლება დაიშალოს

$$R = \oplus_i R_i$$

პირდაპირ ჯამად (ანუ, R_i არის ადიტიური ქვეჯგუფი და ნებისმიერი r ელემენტი R-დან ერთადერთი გზით შეიძლება ჩაიწეროს $r = r_1 + \cdots + r_m$ სასრული ჯამის სახით, სადაც r_j არიან

არანულოვანნი და მიეკუთვნებიან განსხვავებულ R_i-ებს) და უფრო მეტიც $R_iR_j \subseteq R_{i+j}$. ის ელემენტები, რომლებიც ეკუთვნიან რომელიმე R_i-ს ეწოდებათ ჰომოგენურები. ისეთი r_j, რომელიც გვხვდება r-ის ცალსახა წარმოდგენაში ეწოდებათ r-ის ჰომოგენური კომპონენტები

განვიხილოთ N-გრადუირებული k- ალგებრა R: ყოველი R_i არის ვექტორული სივრცე k ველის მიმართ. ვთქვათ, M არის N-გრადუირებული R მოდული. გვაქვს $H(M,t) = \sum_i H(M,i)t^i$, სადაც $H(M,i) = dim_k M_i$. შემდეგ ფუნქციას $H(M,.) : N \to N$ ეწოდება M-ის ჰილბერტის ფუნქცია. აქ მოყვანილია რამოდენიმე მაგალითი:

$R = k$	$H(R,t) = 1.$
$R = k[x]$	$H(R,t) = 1 + t + t^2 + \cdots = 1/(1-t).$
$R = k[x,y]$	$H(R,t) = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + \cdots = 1/(1-t)^2.$
$R = k[x_1, \cdots, x_m]$	$H(R,t) = 1/(1-t)^m.$
$R = k[x,y]/(xy)$	$H(R,t) = 1 + 2t + 2t^2 + 2t^3 + \cdots = (1+t)/(1-t).$
$R = k[x,y]/(x^2+y^2)$	$H(R,t) = 1 + 2t + 2t^2 + 2t^3 + \cdots = (1+t)/(1-t).$

ბოლო ორ მაგალითში ნაჩვენებია, რომ არაიზომორფულ საფეხურიან k- ალგებრას შეიძლება ჰქონდეს ერთი და იგივე ჰილბერტის მწკრივი.

ნაშრომის ამ ნაწილში ჩვენ გავაანალიზებთ G სასრული ჯგუფების მორავას K-თეორიის რგოლებს $K(s)^*(BG)$, სადაც $s = 2; p = 2$. თითოეულ მაგალითში $K(2)^*(BG)$ რგოლი წარმოდგენილია, როგორც ფაქტორ-რგოლი $K(2)^*[x_1, x_2, \cdots, x_m]$ პოლინომიალური რგოლისა, I იდიალით, რომელიც წარმოქმნილია ცხადი პოლინომებით.

ამ სიტუაციაში $HP(t)$-ს ზემოთმოყვანილი, ტრადიციული განსაზღვრება არ იმუშავებს, რადგან v_2-ის ხარისხები უარყოფითი განზომილებისაა და ამიტომ v_2-ს ვერ განვიხილავთ როგორც ცვლადს. თუ v_2-ს უგულვებელვყობთ, ჩავსვავთ $v_2 = 1$, მაშინ თანაფარდობების იდეალი არ იქნება ერთგვაროვანი რის გამოც ფაქტორ-რგოლი არ იქნება გრადუირებული (იქნება ფილტრირებული) კოჰომოლოგიური განზომილების მიმართ. შესაძლოა I იდეალი შევცვალოთ გარკვეული ერთგვაროვანი იდეალით და ამრიგად განვსაზღვროთ შესაბამისი ჰილბერტ-პუანკარეს პოლინომი, ისე როგორც ეს არის მოყვანილი [43] შრომაში.

განსაზღვრება 6.2. *ვთქვათ I არის k ველზე $k[x_1, \cdots, x_n]$ პოლინომიალური რგოლის რაღაც იდეალი, და ვთქვათ $>$ არის გლობალური მონომიალური დალაგებით. $k[x_1, \cdots, x_n]/I$ რგოლი არის ფილტრირებული ალგებრა და $>$ დალაგების შესაბამისი ჰილბერტ-პუანკარეს პოლინომი განისაზღვრება შემდეგნაირად: შევცვალოთ I იდეალი მისი გრობნერის ბაზისით წარმოქმნილი იდეალის I' მოწინავე იდეალით*

$$L(I) := L_>(I') = (L_>(f) | f \in I') \subset k[x_1, \cdots, x_n],$$

ანუ $L(I)$ წარმოქმნილია I იდეალის გრობნერის ბაზისის მოწინავე ერთწევრებით $>$ დალაგების შესაბამისად. მაშინ გვექნება $k[x_1, \cdots, x_n]/L_>(I)$ გრადუირებული რგოლი და განსაზღვრებით $HP(t, k[x_1, \cdots, x_n]/I) = HP(t, k[x_1, \cdots, x_n]/L_>(I))$, $>$ დალაგების მიხედვით.

მორავას $K(2)^*(BG)$ რგოლები განსახილველი ჯგუფებისთვის არის შემდეგი:

დებულება 6.3. *ვთქვათ G_i არის ერთ-ერთი შემდეგი ჯგუფებიდან $G_{34},\cdots,G_{41}$, მაშინ $K(2)^*(BG_i)\cong K(2)^*[a,b,c,x_1,x_2,y_1,y_2,T]/I_i$, სადაც $|a|=|b|=|c|=|x_1|=|y_1|=1$, $|x_2|=|y_2|=|T|=2$ და I_i იდეალის თანაფარდობები მოიცემა შემდეგნაირად:*

$$I_{34}=(a^4,b^4,c^4,c+x_1+v{x_2}^2+v^3{x_1}^2{x_2}^4,y_1+c+v{y_2}^2+v^3{y_1}^2{y_2}^4,c(c+x_1+vc^2x_2),c(c+y_1+vc^2y_2),a(a+x_1+va^2x_2),b(b+y_1+vb^2y_2),v^2{y_2}^4+b^2+bc,v^2{x_2}^4+a^2+ac,(c+x_1+vc^2x_2)(b+y_1+vb^2y_2)+vb^3T,(c+y_1+vc^2y_2)(a+x_1+va^2x_2)+va^3T,T^2+Tx_1y_1+x_2y_1(c+y_1+vc^2y_2)+x_1y_2(c+x_1+vc^2x_2),T(a+x_1+va^2x_2)+va^3x_2(c+y_1),T(b+y_1+vb^2y_2)+vb^3y_2(c+x_1),cT);$$

$$I_{35}=(a^4,b^4,c^4,c+x_1+v{x_2}^2+v^3{x_1}^2{x_2}^4,y_1+v{y_2}^2+v^3{y_1}^2{y_2}^4,c(c+x_1+vc^2x_2),c(c+y_1+vc^2y_2),a(a+x_1+va^2x_2),b(b+y_1+vb^2y_2),v^2{y_2}^4+b^2+bc+c^2,v^2{x_2}^4+a^2+ac,(c+x_1+vc^2x_2)(b+y_1+vb^2y_2)+vb^3T,(c+y_1+vc^2y_2)(a+x_1+va^2x_2)+va^3T,T^2+Tx_1y_1+x_2y_1(c+y_1+vc^2y_2)+x_1y_2(c+x_1+vc^2x_2),T(a+x_1+va^2x_2)+va^3x_2(c+y_1),T(b+y_1+vb^2y_2)+vb^3y_2(c+x_1),cT);$$

$$I_{36}=(a^4,b^4,c^4,x_1+v{x_2}^2+v^3{x_1}^2{x_2}^4+b,y_1+v{y_2}^2+v^3{y_1}^2{y_2}^4+c,c(c+x_1+vc^2x_2),c(c+y_1+vc^2y_2),a(a+y_1+va^2y_2),b(b+x_1+vb^2x_2),v^2{y_2}^4+a^2+ac,v^2{x_2}^4+c^2+bc,(c+x_1+vc^2x_2)(a+y_1+va^2y_2)+va^3T,(c+y_1+vc^2y_2)(b+x_1+vb^2x_2)+vb^3T,T^2+Tx_1y_1+x_2y_1(c+y_1+vc^2y_2)+x_1y_2(c+x_1+vc^2x_2),T(b+x_1+vb^2x_2)+vb^3x_2(c+y_1),T(a+y_1+va^2y_2)+va^3y_2(c+x_1),cT);$$

$$I_{37}=(a^4,b^4,c^4,x_1+v{x_2}^2+v^3{x_1}^2{x_2}^4+b+c+vb^2c^2,y_1+v{y_2}^2+v^3{y_1}^2{y_2}^4,c(c+x_1+vc^2x_2),c(c+y_1+vc^2y_2),a(a+y_1+va^2y_2),b(b+x_1+vb^2x_2),v^2{y_2}^4+a^2+ac+c^2,v^2{x_2}^4+bc,(c+x_1+vc^2x_2)(a+y_1+va^2y_2)+va^3T,(c+y_1+vc^2y_2)(b+x_1+vb^2x_2)+vb^3T,T^2+Tx_1y_1+x_2y_1(c+y_1+vc^2y_2)+x_1y_2(c+x_1+vc^2x_2),T(b+x_1+vb^2x_2)+vb^3x_2(c+y_1),T(a+y_1+va^2y_2)+va^3y_2(c+x_1),cT);$$

$$I_{38}=(a^4,b^4,c^4,x_1+v{x_2}^2+v^3{x_1}^2{x_2}^4+a,y_1+v{y_2}^2+v^3{y_1}^2{y_2}^4+a+b+c+va^2b^2+vb^2c^2+va^2c^2,c(c+x_1+vc^2x_2),c(c+y_1+vc^2y_2),a(a+x_1+va^2x_2),b(b+y_1+vb^2y_2),v^2{y_2}^4+a^2+bc+vabc^3,v^2{x_2}^4+c^2+ac,(c+x_1+vc^2x_2)(b+y_1+vb^2y_2)+vb^3T,(c+y_1+vc^2y_2)(a+x_1+va^2x_2)+va^3T,T^2+Tx_1y_1+x_2y_1(c+y_1+vc^2y_2)+x_1y_2(c+x_1+vc^2x_2),T(a+x_1+va^2x_2)+va^3x_2(c+y_1),T(b+y_1+vb^2y_2)+vb^3y_2(c+x_1),cT);$$

$$I_{39}=(a^4,b^4,c^4,x_1+v{x_2}^2+v^3{x_1}^2{x_2}^4+b+c+vb^2c^2,y_1+v{y_2}^2+v^3{y_1}^2{y_2}^4+c,c(c+x_1+vc^2x_2),c(c+y_1+vc^2y_2),a(a+x_1+va^2x_2),b(b+y_1+vb^2y_2),v^2{y_2}^4+b^2+bc,v^2{x_2}^4+a^2+b^2+ac+vabc^3,(c+x_1+vc^2x_2)(b+y_1+vb^2y_2)+vb^3T,(c+y_1+vc^2y_2)(a+x_1+va^2x_2)+va^3T,T^2+Tx_1y_1+x_2y_1(c+y_1+vc^2y_2)+x_1y_2(c+x_1+vc^2x_2),T(a+x_1+va^2x_2)+va^3x_2(c+y_1),T(b+y_1+vb^2y_2)+vb^3y_2(c+x_1),cT);$$

$$I_{40}=(a^4,b^4,c^4,x_1+v{x_2}^2+v^3{x_1}^2{x_2}^4+b+c+vb^2c^2,y_1+v{y_2}^2+v^3{y_1}^2{y_2}^4,c(c+x_1+vc^2x_2),c(c+y_1+vc^2y_2),a(a+x_1+va^2x_2),b(b+y_1+vb^2y_2),v^2{y_2}^4+b^2+c^2+bc,v^2{x_2}^4+a^2+b^2+ac+vabc^3,(c+x_1+vc^2x_2)(b+y_1+vb^2y_2)+vb^3T,(c+y_1+vc^2y_2)(a+x_1+va^2x_2)+va^3T,T^2+Tx_1y_1+x_2y_1(c+y_1+vc^2y_2)+x_1y_2(c+x_1+vc^2x_2),T(a+x_1+va^2x_2)+va^3x_2(c+y_1),T(b+y_1+vb^2y_2)+vb^3y_2(c+x_1),cT);$$

$$I_{41}=(a^4,b^4,c^4,x_1+v{x_2}^2+v^3{x_1}^2{x_2}^4+b+c+vb^2c^2,y_1+v{y_2}^2+v^3{y_1}^2{y_2}^4+a+b+c+va^2b^2+vb^2c^2+va^2c^2,c(c+x_1+vc^2x_2),c(c+y_1+vc^2y_2),a(a+x_1+va^2x_2),b(b+y_1+vb^2y_2),v^2{y_2}^4+a^2+bc+vabc^3,v^2{x_2}^4+a^2+b^2+ac+vabc^3,(c+x_1+vc^2x_2)(b+y_1+vb^2y_2)+vb^3T,(c+y_1+vc^2y_2)(a+x_1+va^2x_2)+va^3T,T^2+Tx_1y_1+x_2y_1(c+y_1+vc^2y_2)+x_1y_2(c+x_1+vc^2x_2),T(a+x_1+va^2x_2)+va^3x_2(c+y_1),T(b+y_1+vb^2y_2)+vb^3y_2(c+x_1),cT);$$

მორავას $K(s)^*(BG)$ რგოლები D, Q, QD, SD ჯგუფებისთვის დათვლილია [40, 32] შრომაში. კერძოდ, გვაქვს შემდეგი

დებულება 6.4. *ვთქვათ G არის ერთ-ერთი ჯგუფი D, Q, SD-დან, მაშინ $K(2)^*(BG) \cong K(2)^*[c, x, c_2]/I_G$, სადაც $|c| = |x| = 1$, $|c_2| = 2$ და I_G იდეალის თანაფარდობები მოიცემა შემდეგნაირად:*

$$
\begin{aligned}
I_D =&(c^4, x^4, vcc_2{}^2 + vc^3c_2, v^{42}c_2{}^{64} + cx + x^2, vxc_2{}^2 + vxc^2c_2 + v^{84}c_2{}^{127}+\\
&v^{82}c_2{}^{124} + v^{78}c_2{}^{118} + v^{70}c_2{}^{106} + v^{54}c_2{}^{82} + v^{22}c_2{}^{34});\\
I_Q =&(c^4, x^4, vcc_2{}^2 + vc^3c_2 + c^2, v^{42}c_2{}^{64} + cx + x^2, vxc_2{}^2 + vxc^2c_2 + v^{84}c_2{}^{127}+\\
&v^{82}c_2{}^{124} + v^{78}c_2{}^{118} + v^{70}c_2{}^{106} + v^{54}c_2{}^{82} + v^{22}c_2{}^{34} + cx);\\
I_{SD} =&(c^4, x^4, vcc_2{}^2 + vc^3c_2 + cx, v^{42}c_2{}^{64} + cx + x^2, vxc_2{}^2 + vxc^2c_2 + v^{84}c_2{}^{127}+\\
&v^{82}c_2{}^{124} + v^{78}c_2{}^{118} + v^{70}c_2{}^{106} + v^{54}c_2{}^{82} + v^{22}c_2{}^{34} + cx).
\end{aligned}
$$

დებულება 6.5. *ვთქვათ, QD არის ქვაზი-დიედრის 32 რიგის ჯგუფი, როგორც ზევით იყო მოცემული, მაშინ $K(2)^*(BG) \cong K(2)^*[x, y, c_1, c_2]/I_{QD}$, სადაც $|x| = |y| = |c_1| = 1$, $|c_2| = 2$ და I_{QD} იდეალის წარმოდგენები არის*

$$(x^4, y^4, x(c_1 + x + vx^2c_2), y(c_1 + y + vy^2c_2), (c_1 + x + vx^2c_2)(c_1 + y + vy^2c_2), x + v^{21}c_2{}^{32}).$$

D, Q, SD ჯგუფებისთვის SINGULAR-ის ბრძანება $vdim(std(I_G))$ დააბრუნებს პასუხს 142, $K(2)^*$-ეილერის მახასიათებელია $K(2)^*(BG)$-თვის. გარდა ამისა გვაქვს

$G = D, Q, SD$ ჯგუფისთვის ჰილბერტის პირველი მწკრივი $Q(t)$ და $K(2)^*(BG)$-ის ჰილბერტ-პუანკარის $HP(t)$ მწკრივი $(c, x, z)(1, 1, 2)$ დალაგების შესაბამისად ტოლია შემდეგის:

$$
\begin{aligned}
Q(t) =&1 - t3 - 2t4 + t6 + t7 + t8 - t10 - t72 + 2t71 - t70 - t68 + 3t66 - 2t65 =\\
&(1-t)^3(1+t)(1 + +2t + 4t^2 + 5t^3 + 5t^4 + 4t^5 + 3t^6 + \sum_{i=7}^{64} 2t^i + t^{66} + t^{68});\\
HP(t) =&Q(t)/(1-t)^2(1-t^2) =\\
&1 + 2t + 4t^2 + 5t^3 + 5t^4 + 4t^5 + 3t^6 + \sum_{i=7}^{64} 2t^i + t^{66} + t^{68}.
\end{aligned}
$$

$> ring\ R = (2, v), (c, x, z), (a(-3, 1, 1, 2), dp);$

$> ideal\ ID = (c4, x4, vcz2 + vc3z, v42z64 + cx + x2, vxz2 + vxc2z + v84z127 + v82z124 + v78z118 + v70z106 + v54z82 + v22z34);$

$> vdim(std(ID));$

142

$> intvec\ wD = hilb(std(ID), 1, intvec(1, 1, 2));$

$> size(wD);$

74

$> wD;$

$1, 0, 0, -1, -2, 0, 1, 1, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$

$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$

$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 3, 0, -1, 0, -1, 2, -1, 0$

$> ideal\ IQ = (c4, x4, vcz2 + vc3z + c2, v42z64 + cx + x2, vxz2 + vxc2z + v84z127 + v82z124 + v78z118 + v70z106 + v54z82 + v22z34 + cx);$

$> intvec\ wQ = hilb(std(IQ), 1, intvec(1, 1, 2));$

$> size(wQ);$

74

$> wQ;$

$1, 0, 0, -1, -2, 0, 1, 1, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$

$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$

$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 3, 0, -1, 0, -1, 2, -1, 0$

$> ring\ r = 0, (t), dp;$

$> poly\ QD = 1 - t3 - 2t4 + t6 + t7 + t8 - t10 - t72 + 2t71 - t70 - t68 + 3t66 - 2t65;$

$> factorize(QD);$

$[1] :$

$_[1] = -1$

$_[2] = t - 1$

$_[3] = t68 + t66 + 2t64 + 2t63 + 2t62 + 2t61 + 2t60 + 2t59 + 2t58 + 2t57 + 2t56 + 2t55 + 2t54 + 2t53 + 2t52 + 2t51 + 2t50 + 2t49 + 2t48 + 2t47 + 2t46 + 2t45 + 2t44 + 2t43 + 2t42 + 2t41 + 2t40 + 2t39 + 2t38 + 2t37 + 2t36 + 2t35 + 2t34 + 2t33 + 2t32 + 2t31 + 2t30 + 2t29 + 2t28 + 2t27 + 2t26 + 2t25 + 2t24 + 2t23 + 2t22 + 2t21 + 2t20 + 2t19 + 2t18 + 2t17 + 2t16 + 2t15 + 2t14 + 2t13 + 2t12 + 2t11 + 2t10 + 2t9 + 2t8 + 2t7 + 3t6 + 4t5 + 5t4 + 5t3+$

$4t2 + 2t + 1$

$_[4] = t + 1$

$[2] :$

$1, 3, 1, 1.$

$> ideal\ ISD = (c4, x4, vcz2 + vc3z + cx, v42z64 + cx + x2, vxz2 + vxc2z + v84z127 + v82z124 + v78z118 + v70z106 + v54z82 + v22z34 + cx);$

$> vdim(std(ISD));$

142

$> intvecwSD = hilb(std(ISD), 1, intvec(1, 1, 2));$

$> size(wSD);$

74

$> wSD;$

$1, 0, 0, -1, -2, 0, 1, 1, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$

$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$

$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 3, 0, -1, 0, -1, 2, -1, 0$

ამრიგად,

$$Q(t) = (1-t)^3(1+t)(1 + 2t + 4t^2 + 5t^3 + 5t^4 + 4t^5 + 3t^6 + \sum_{i=7}^{64} 2t^i + t^{66} + t^{68}).$$

$\square$

ანალოგიურად, $K(2)^*(BQD)$-თვის ($K(2)^*$- ეილერის მახასიათებელით 352) ერთისმხრივ გვაქვს

$Q(t)$ ჰილბერტის პირველი მწკრივი და $K(2)^*(BQD)$-ის ჰილბერტ-პუანკარეს $HP(t)$ მწკრივი $(c_1, x, y, c_2)(1, 1, 1, 2)$ დალაგების შესაბამისად ტოლია

$$\begin{aligned} Q(t) =&(t-1)^4(t^{32}+1)(t^{16}+1)(t^8+1)(t^4+1)(t^2+1)(t^4+3t^3+3t^2+3t+1)(t+1); \\ HP(t) =&Q(t)/(1-t)^3(1-t^2) = \\ &(1+t^{32})(1+t^{16})(1+t^8)(1+t^4)(1+t^2)(1+3t+3t^2+3t^3+t^4). \end{aligned}$$

ახლა განვიხილოთ $G_{34}, \cdots, G_{41}$ ჯგუფები. რვავე ჯგუფის $K(2)^*$-ეილერის მახასიათებელი აქვს 184-ის ტოლი.

ჰილბერტის პირველი $Q(t)$ მწკრივი და $K(2)^*(BG)$-ის ჰილბერტ-პუანკარის $HP(t)$ მწკრივი, $G_{34}, \cdots, G_{41}$ ჯგუფებისთვის

$$(a, b, c, y_1, x_1, y_2, x_2, T), (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2), dp$$

დალაგების შესაბამისად არის მოცემული შემდეგ ცხრილში

$$\begin{aligned} &G_{34}, G_{35}, G_{39}, G_{40}: \\ &Q(t) = (1-t)^8(1+t)^3(1+t^2)(1+5t+13t^2+19t^3+21t^4+16t^5+11t^6+5t^7+t^8); \\ &HP(t) = 1+5t+14t^2+24t^3+34t^4+35t^5+32t^6+21t^7+12t^8+5t^9+t^{10}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &G_{36}, G_{37}, G_{38}, G_{41}: \\ &(1-t)^8(1+t)^3(1+5t+14t^2+25t^3+34t^4+35t^5+31t^6+21t^7+12t^8+5t^9+t^{10}); \\ &1+5t+14t^2+25t^3+34t^4+35t^5+31t^6+21t^7+12t^8+5t^9+t^{10}. \end{aligned}$$

გამოთვლები ზუსტად ანალოგიურია.

საბოლოოდ, შესაძლოა გაგვიჩნდეს გრძნობა, რომ ორი G_1, G_2 ჯგუფი ერთი და იგივე სასრული რიგით იქნება ექვივალენტური თუ არის$x_1, \cdots x_m$ ცვლადების უპირატესობიანი დალაგება $w = (w_1, \cdots w_m)$ $x_1, \cdots x_m$, ისეთი, რომ

$$R_i \equiv K(s)^*(BG_i) = K(s)^*[x_1, \cdots, x_m]/I_i$$

და R_i-ს ჰილბერტ-პუანკარეს პოლინომები w დალაგების შესაბამისად ტოლია.

არ არის ძნელი იმის შემოწმება, რომ ეს შეგრძნება 14 ჯგუფისთვის, რომლიც არის 16 რიგის, გვაქვს 11 ექვივალენტური კლასი. შევადაროთ ეს რაოდენობა სხვა ექვივალენტობის კლასების რაოდენობას: იზოკლინიკური ჯგუფები - 3, აქვს იგივე გაერთიანებული კლასები ზომა სტატისტიკებით - 3, აქვს იგივე ხარისხი უკვეცი წარმოდგენებისა - 3, 1- იზომორფული ჯგუფები - 12.

წყარო

[1] M. Bakuradze, N. Gachechiladze : *Morava K-theory rings of the extensions of* C_2 *by the products of 2-groups, Moscow Math. J.* **16, 4***(2016), 603-619.* 6, 10, 47

[2] N. Gachechiladze : *Hilbert functions of Morava* $K(2)^*$ *theory rings of some* 2*-groups, Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics Vol.***66***, (2016) 10-13.* 6

[3] M. Bakuradze, N. Gachechiladze : *Some* 2*-groups from the view of Hilbert-Poincare polynomials of* $K(2)^*(BG)$ *, Tbilisi Mathematical Journal.* **10, 2** *(2017), 103-110.* 6, 47

[4] M. Bakuradze, S. Priddy : *Transferred Chern classes in Morava* K*-theory, Proc. Amer. Math. Soc.,* **132***(2004), 1855-1860.* 6, 9, 15

[5] M. Bakuradze, S. Priddy : *Transfer and complex oriented cohomology rings, AGT,* **3***(2003), 473-507.* 6, 9

[6] M. Lazard ,*: Sur les groupes de Lie formels à un paramètre, Bulletin de la Société Mathématique de France,* **83***: (1955) 251–274, ISSN 0037-9484, MR 0073925* 7

[7] D. Quillen*: On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory, Bull. Amer. Math. Soc.* **75***, 1293–1298 (1969).* 7

[8] S. P. Novikov*: The methods of algebraic topology from the point of view of cobordism theory, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **31***, 885–951 (1967), transl. Math. SSR–Izv. 1, 827–913 (1967).* 7

[9] J.F. Adams *: Infinite loop spaces, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, (1978).* 8, 15, 19, 21

[10] I. Schur*: Neuer Beweis eines Satzes über endliche Gruppen, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1902, 1013–1019.* 8

[11] M. Bakuradze*: Polynomial behavior of the Honda formal group law, J. Homotopy Relat. Structures, Published online (2016) DOI:10.1007/s40062-016-0128-0.* 9

[12] A. Dold *: The fixed point transfer of fibre-preserving maps, Math. Zeit.,* **148***(1976), 215-244.* 8, 15

[13] J. C. Becker, D. H. Gottlieb *: The transfer map and fiber bundles, Topology* **14** *(1975), 1-12.* 8

[14] D. C. Ravenel *: Morava* K*-theories and finite groups, Contemp. Math.,* **12** *(1982), 289- 292.* 9

[15] A. Baker *: Hecke operators as operations in elliptic cohomology, J. Pure Appl. Algebra* **63** *(1990), 1–11* 9

[16] B. Thomas *: Elliptic Cohomology, Kluwer Academic/Plenum (1999)* 9

[17] J. A. Devoto *: Equivariant Elliptic homology and finite groups Mich. Math. J.***43** *(1996), 3–32.* 9

[18] N. Yagita : *Equivariant BP-cohomology for finite groups, Trans. Amer. Math. Soc.,* **317, 2***(1990), 485-499.* 9

[19] N. Yagita: *Note on BP-theory for extensions of cyclic groups by elementary abelian p-groups, Kodai Math. J.* **20, 2***(1997), 79-84.* 9, 10, 11

[20] N. Yagita: *Cohomology for groups of $rank_p(G) = 2$ and Brown-Peterson cohomology, J. Math. Soc. Japan* **45, 4***(1993), 627-644.* 9, 11

[21] M. Tezuka and N. Yagita: *Homotopy theory and related topics(Kinosaki, 1988), 57-69, Lecture Notes in Math.* **1418***, Springer, Berlin, 1990.* 9, 11

[22] B. Schuster, N. Yagita : *On Morava K-theory of extraspecial 2-groups, Proc. Amer. Math. Soc.,* **132, 4***(2004), 1229-1239.* 9, 47

[23] B. Schuster : *Morava K-theory of groups of order 32, Algebraic and Geometric Topology,* **11***(2011), 503-521.* 3, 4, 9, 10, 17, 38, 47

[24] B. Schuster : *$K(n)$ Chern approximations of some finite groups, Algebraic and Geometric Topology,* **12, 3** *(2012), 1695-1720.* 9, 10, 47

[25] B. Schuster : *On Morava K-theory of some finite 2-groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc.,* **121***(1997), 7-13.* 9, 10, 47

[26] M. Hopkins, N. Kuhn, and D. Ravenel : *Generalized group characters and complex oriented cohomology theories , J. Amer. Math. Soc.,* **13, 3***(2000), 553-594.* 9, 10, 11, 16

[27] M. Brunetti :*Morava K-theory of p-groups with cyclic maximal subgroups and other related p-groups, K-Theory* **24***, (2001), 385–395.* 9

[28] J. McClure, V. Snaith :*On the K-theory of the extended power construction, Proc. Camb. Phil. Soc.***92***, (1982), 263–274.* 9

[29] J. R. Hunton : *Morava K-theories of wreath products, Math. Proc. Camb. Phil. Soc.,* **107***(1990), 309-318.* 9, 11

[30] M. Bakuradze : *Morava K-theory rings for a quasi-dihedral group in Chern classes, Proc. Steklov Inst. of Math.* **252***(2006), 23-29.* 9, 47

[31] M. Bakuradze : *Morava K-theory rings for the modular groups in Chern classes, K-theory,* **38, 2***(2008), 87-94.* 9, 10

[32] M. Bakuradze : *Induced representations, Transferred Chern classes and Morava rings $K(s)^*(BG)$: some calculations, Proc. Steklov Inst. of Math.* **275***(2011), 160-168.* 9, 10, 47, 50

[33] M. Bakuradze, M. Jibladze : *Morava K-theory rings of groups $G_{38}, ..., G_{41}$ of order 32, J. K-Theory,* **13***(2014), 171-198* 3, 4, 9, 15, 16, 17, 18, 47

[34] T. Gramushnjak and P. Puusemp : *Description of a Class of 2-Groups, Journal of Nonlinear Math. Physics* **13***(2006), 55-65* 10

[35] D. C. Jonson, W. S. Wilson : *BP operations and Morava's extraordinary K-theories, Math. Z.,* **144** *(1975), 55-75.* 10

[36] I. Kriz : *Morava K-theory of classifying spaces: Some calculations, Topology, 36(1997), 1247-1273.* 10, 11

[37] M. Bakuradze: *Morava K-theory rings of the extensions of C_p by the products of good groups under diagonal action, Georgian Math. J.,* **22 (4)***(2015), 451-455.* 3, 4, 15

[38] D. S. Kahn, S. B. Priddy : *Applications of the transfer to stable homotopy theory, Bull. Amer. Math. Soc.,* **78***(1972), 981-987.* 15

[39] B. Schuster : *Morava K-theory of classifying spaces, Habilitationsschrift, 2006, 124 pp.* 15, 17

[40] M. Bakuradze, V.V. Vershinin : *Morava K-theory rings for the dihedral, semi-dihedral and generalized quaternion groups in Chern Classes, Proc. Amer. Math. Soc.,* **134***(2006), 3707-3714 .* 16, 37, 47, 50

[41] V. M. Buchstaber : *Modules of differentials of the Atiyah-Hirzebruch spectral sequence, Matem. Sbornik,* **78:2***(1969), 307-320 .* 16

[42] V. M. Buchstaber : *Modules of differentials of the Atiyah-Hirzebruch spectral sequence. II, Matem. Sbornik,* **83:1***(1970), 61-76.* 16

[43] W. Decker, G. M. Greuel, G. Pfister and H. Schonemann, *Singular 4-0-2 — A computer algebra system for polynomial computations, http://www.singular.uni-kl.de (2015).* 48

[44] M. Hall and J.K. Senior : *The groups of order 2^n, $n \leq 6$, The Macmillan Co., New York; Collier-Macmillan, Ltd., London 1964.* 3, 4, 47